

# 卓球の無回転ボールの空力係数評価

Estimation of aerodynamic coefficients for no-spinning ball in table tennis

発表者：藤原将一

指導教員：坪井一洋

## 1. はじめに

近年、スポーツの競技力が飛躍的に向上しており、スポーツ技術やスポーツ用具の流体特性や空力特性に関する知見が多くの領域から求められている。特にボールを投げたり、蹴ったりする競技では、流体力学的特性がボールの動きに大きな影響を与える。

最近では、野球のナックルボールやサッカーの無回転ボールなど、空中を無回転で飛ぶボールに関する研究が行われている[1][2]。しかし、無回転ボールに働く力についてはまだ説明はされていない。

そこで、本研究では縫い目等の影響がない卓球の無回転ボールの軌道から空力係数を推定する。そして、速度と加速度に対する空力特性を調べる。

## 2. 運動方程式

投射時のボールの重心位置を座標原点とし、鉛直上向きにy軸を取る。ボールの初速度ベクトルとy軸が作る平面を考え、この平面内で水平方向にx軸を取る。以下ではボールはこのx-y平面内で2次元運動すると仮定する。

空気中においてボールの速度の二乗に比例する抵抗と揚力が働くとすると、ボール重心の運動方程式と初期条件は次式で与えられる。

$$m\dot{u} = -kqu - lqv \quad (1)$$

$$m\dot{v} = -kqv + lqu - mg \quad (2)$$

ここで、 $(x, y)$ は重心の位置ベクトル、 $(u, v)$ は速度ベクトルで $q^2 = u^2 + v^2$ 、 $(\dot{u}, \dot{v})$ は加速度ベクトルとする。また、 $m$ はボールの質量、 $g$ は重力加速度である。式(1)と式(2)で用いられる $k$ と $l$ は次式で定義される抵抗と揚力の比例定数である。

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_D \\ l = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_L \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 $d$ はボールの代表径、 $\rho$ は空気密度、 $C_D$ と $C_L$ は無次元の抵抗係数と揚力係数である。

## 3. 空力推定法

式(1)と式(2)で与えられた2次元の運動方程式の場合には、抵抗係数と揚力係数はそれぞれ以下のような簡単な形で表される。

$$\frac{k}{m} = -\frac{q\dot{q} + gv}{q^3} = -\frac{1}{q^3}(u\dot{u} + v\dot{v} + gv) \quad (4)$$

$$\frac{l}{m} = \kappa + \frac{gu}{q^3} = \frac{1}{q^3}(u\dot{v} + \dot{u}v + gu) \quad (5)$$

ただし、 $\kappa$ は曲率である。

式(4)と式(5)より、ボールの速度と加速度から抵抗係数と揚力係数を算出できることがわかる。そこで、ボールの位置データからその軌道を部分的に補間することで上記の量を求めることを考える。ここでは最も簡単な補間として位置座標 $(x, y)$ を時間の2次関数として表すことにする。

今、時刻 $t = t_0$ での $x$ または $y$ の値を $f_0$ として、 $t = t_0$ より前の時刻 $t = t_-$ での軌道上の位置座標を $f_-$ 、 $t = t_0$ より後の時刻 $t = t_+$ での軌道上の位置座標を $f_+$ とする。これらの3点を通る2次関数はひとつに決まり、その結果、時刻 $t = t_0$ での $f$ の1階微分と2階微分はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\dot{f}_0 = \frac{1}{(\Delta^+ + \Delta^-)t} \left( \frac{\Delta^- t}{\Delta^+ t} \Delta^+ f + \frac{\Delta^+ t}{\Delta^- t} \Delta^- f \right) \quad (6)$$

$$\ddot{f}_0 = \frac{2}{(\Delta^+ + \Delta^-)t} \left( \frac{\Delta^+ f}{\Delta^+ t} - \frac{\Delta^- f}{\Delta^- t} \right) \quad (7)$$

ここで $\Delta^+ f = f_+ - f_0$ 、 $\Delta^- f = f_0 - f_-$ を表し、特に $(\Delta^+ + \Delta^-)t = \Delta^+ t + \Delta^- t$ の意味である。

## 4. 空力係数推定

卓球の無回転ボールの軌道データとして、今回はレイノルズ数 $Re=30000$ と $60000$ の場合についてそれぞれ15組と14組を使用した。図1と図2にはそれぞれのレイノルズ数でのno.1からno.4のデータを示す。

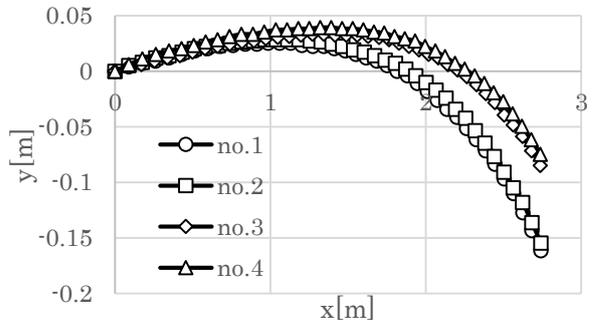


図1 卓球ボールの軌道例(Re=30000)

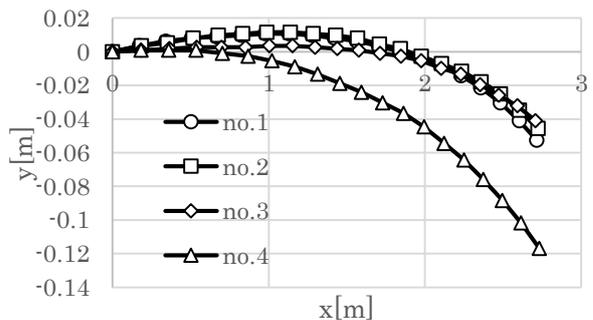


図2 卓球ボールの軌道例(Re=60000)

これらの軌道データから、補間を用いて抵抗係数 $C_D$ と揚力係数 $C_L$ を推定した。時間経過による $C_D$ と $C_L$ の変化を図3～図6に示す。

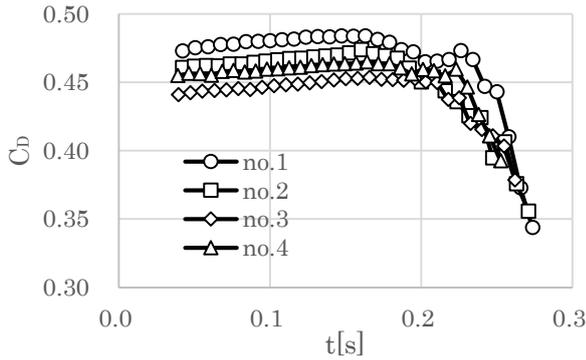


図3  $C_D$ の変化(Re=30000)

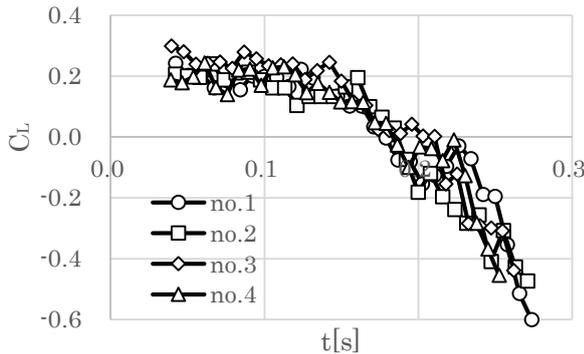


図4  $C_L$ の変化(Re=30000)

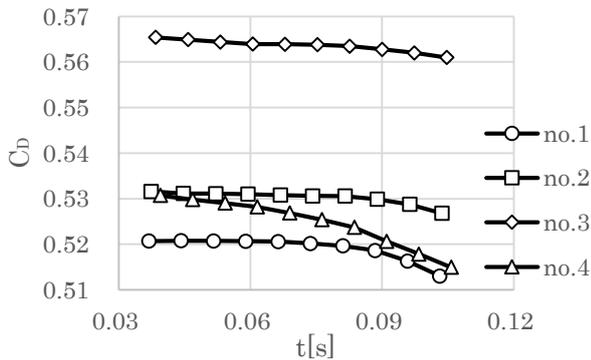


図5  $C_D$ の変化(Re=60000)

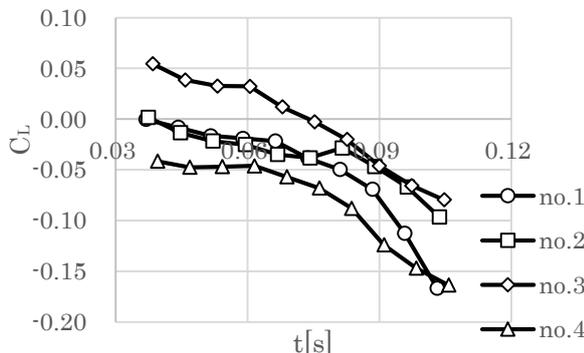


図6  $C_L$ の変化(Re=60000)

Re=30000の場合、どの軌道でも $C_D$ は0.2秒以降減少する傾向が見られた。また、 $C_L$ は0.2秒付近で正値から負値に変わることがわかった。

しかし、Re=60000の場合では、 $C_D$ はほぼ一定の値を取る例が多く、 $C_L$ は減少傾向があるが、no.4のように最初から負値となっている例もあった。

## 5. 空力特性に関する考察

空力係数を推定した際に、軌道の位置ごとの速度と加速度を求めた。そして、加速度が空力係数に与える影響について調べた。その結果を図7と図8に示す。

これらの図より、いずれのレイノルズ数の場合でも、鉛直方向加速度に対して $C_L$ の値がほぼ一直線上に乗ることがわかる。そして、レイノルズ数が大きい方が直線の傾きが小さいことがわかる。

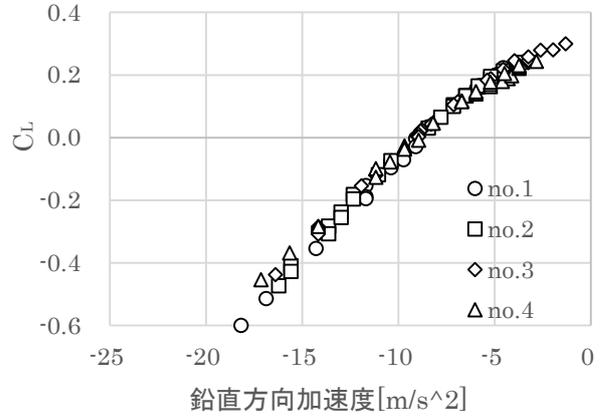


図7 鉛直方向加速度に対する $C_L$ の影響(Re=30000)

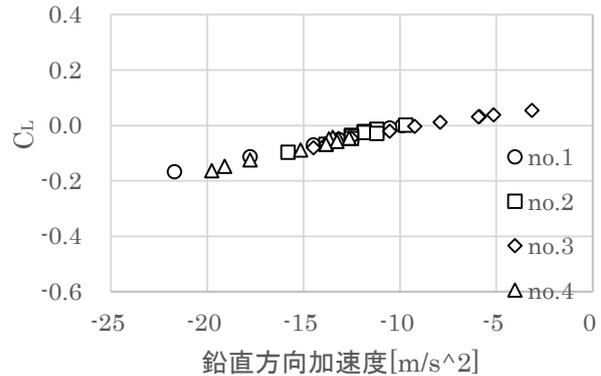


図8 鉛直方向加速度に対する $C_L$ の影響(Re=60000)

## 6. まとめ

本研究では、卓球の無回転ボールの軌道から、ボールの抵抗係数と揚力係数を推定した。そして、速度と加速度に対する空力特性について調べた。

その結果、Re=30000の場合、どの軌道でも $C_D$ は0.2秒以降減少する傾向があり、 $C_L$ は0.2秒付近で正値から負値に変わるといった結果が得られた。

Re=60000の場合では、 $C_D$ はほぼ一定の値であり、 $C_L$ は減少傾向があるが最初から負値となっている例もあった。

また、加速度に対する空力特性については、鉛直方向加速度に対する $C_L$ の値はほぼ直線で近似されることを示した。

## 参考文献

- [1]小倉聡樹, 溝田武人: 高速度カメラを用いたナックルボールの3次元飛翔軌道解析, 可視化情報学会誌, 2005, Vol. 25, Suppl. No. 1, pp. 359-360
- [2]浅井武, 瀬尾和哉, 小林修: サッカーボールの空力特性に関する研究, 体育学研究, 2007, Vol. 52, No. 1, pp. 29-38
- [3]安田海人, 坪井一洋, 田中晃平, 宮崎武: 軌道の特徴量をを用いたボールの空力係数の推定法, 日本機械学会論文集 2014, Vol. 80, No. 814, pp. 1-9