

軌道データを用いたボールの空力係数推定における補間法の比較

Comparison of interpolation methods in aerodynamic coefficients estimation
of a ball using trajectory data

発表者：福島 正之

指導教員：坪井 一洋

1 はじめに

ボールのもつ空力特性を調べるため、一般的には風洞実験が用いられる。しかし、この方法では実験条件が飛翔中の条件と必ずしも一致しない可能性がある。

飛翔中のボールの空力係数を調べるために、その軌道データを用いて、局所的に空力係数を推定する方法がある。この方法では軌道を微小区間に分割し、各区内の軌道を2次関数として補間する。この2次関数を微分することにより局所的に速度と加速度が得られ、これらから空力係数が求まる。

従来は、用いる2次関数を、区間の中央点と両端点の3点を補間して求めていた。しかし、この方法では補間に用いる区間が短い場合に、空力係数の推定値にばらつきが生じる問題があった[1]。

そこで、本研究では、区間内のデータに最小2乗法を適用し2次関数を求める方法を試みる。また、従来法と本研究での補間法において、誤差評価式を求める。そして、これら評価式を基に補間法の評価を行う。さらに、実測データを用いて空力係数を推定し、その結果を比較する。

2 空力係数の推定法

ボールの投射位置を座標原点とし、鉛直上向きを z 軸とする。そして、ボールの初速度と z 軸が作る平面に垂直な方向を y 軸とし、 y 軸と z 軸に垂直な方向を x 軸と定義する。

このとき、飛翔するボールには空気抵抗 \mathbf{D} とボールの回転により発生するマグナス力 \mathbf{N} が働く。さらに、 \mathbf{N} は揚力 \mathbf{L} と横力 \mathbf{S} に分解できる。したがって、運動方程式は式(1)のように表される。

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{D} + \mathbf{N} - g\mathbf{e}_z = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{S} - g\mathbf{e}_z \\ &= D\mathbf{e}_t + L\mathbf{e}_L + S\mathbf{e}_S - g\mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (1)$$

ここで $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ と $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ はそれぞれボールの位置ベクトルと速度ベクトル、 \mathbf{e}_t はボールの速度の単位ベクトル、 \mathbf{e}_L および \mathbf{e}_S はそれぞれ揚力と横力方向の単位ベクトルを表す。そして、 g は重力加速度、 \mathbf{e}_z は z 軸方向の単位ベクトルである。

また D 、 L および S は、それぞれの方向の力の大きさを表す。これらの力の大きさは、一般に速度の2乗に比例する。したがって D 、 L および S は式(2)で表わされる。

$$D = BC_D q^2, \quad L = BC_L q^2, \quad S = BC_S q^2\quad (2)$$

ここで q はボールの速度ベクトルの大きさである。さらに C_D は抵抗係数、 C_L は揚力係数、 C_S は横力係数である。これらの係数は空力係数と呼ばれ、それぞれの力の大きさを決定する無次元の係数である。また、 B は $\rho A/2m$ で定義される。ただし、 ρ は空気密度、 A はボールの断面積、 m はボールの質量である。

空力係数は、飛翔中のボールの局所的な速度と加速度から、式(3)のように求まる[2]。

$$C_D = -\frac{q\dot{q} + gw}{Bq^3}, \quad C_L = \frac{q(q\dot{w} - \dot{q}w) + g(q^2 - w^2)}{Bq^3\sqrt{q^2 - w^2}},\quad (3)$$

$$C_S = \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{Bq^3\sqrt{q^2 - w^2}}$$

3 誤差解析

3.1 誤差の評価式

ここでは、式を簡略化するため自由落下するボールを想定する。ただし、座標系の定義は2節と同様とする。このとき、式(1)において $u = v = 0$ となり、式(3)から抵抗係数 C_D は式(4)のように求まる。

$$C_D = -\frac{\dot{w} + g}{Bw^2}\quad (4)$$

ここで、式(4)において速度 w および加速度 \dot{w} の導出のため、ボールの位置情報からその軌道を部分的に補間する。

今、時刻 $t = t_0$ での z の値を z_0 とする。このとき、 Δt をデータ間の時間間隔として、 $t = t_0$ より前の時刻を $t = t_0 - \Delta t$ と表し、このときの位置座標を z_- とする。同様に、 $t = t_0$ より後の時刻は $t = t_0 + \Delta t$ で表し、このときの位置座標を z_+ とする[1]。ここでの推定では、 $\Delta t = n\tau$ とする。ここで、 n は補間間隔を表わす自然数であり、 τ は位置座標の測定時間間隔である。

ここでは、区間内の中央点とその両端点の3点を補間に用いる従来法と、区間内全てのデータに対して最小2乗法を適用する方法(LS法)を考える。

3.1.1 従来法

中央点 z_0 の位置情報に測定誤差 δz が含まれるとき、中央点は $z_0 + \delta z$ と変位する。このとき、従来法における速度 w_Δ および加速度 \dot{w}_Δ の算出結果を式(5)に示す。

$$w_\Delta = \frac{1}{2n\tau}(z_+ + z_-) = w,\quad (5)$$

$$\dot{w}_\Delta = \frac{1}{n^2\tau^2}(z_+ - z_- - 2z_0) - \frac{2}{n^2\tau^2}\delta z$$

式(5)の \dot{w}_Δ について、右辺1項目は \dot{w} である。また、2項目は測定誤差の影響により加わる項である。この項を \dot{w} の誤差量 $\delta\dot{w}$ とおく。これらの関係を表わす式を以下に示す。

$$\dot{w}_\Delta = \dot{w} + \delta\dot{w}, \quad \delta\dot{w} = -\frac{2}{n^2\tau^2}\delta z\quad (6)$$

また、測定誤差を含む場合に算出される C_D を C_D^A とする。 C_D^A は式(4)において、 $\dot{w} = \dot{w}_\Delta$ とすることで算出できる。したがって、 C_D^A は以下のように表される。

$$C_D^A = -\frac{\dot{w} + g}{Bw^2} - \frac{\delta\dot{w}}{Bw^2}\quad (7)$$

ここで、式(7)の右辺1項目は C_D である。そして、加速

度の場合と同様に、2項目を C_D の誤差量 δC_D とする。
 このとき、 $\delta C_D = -\delta \dot{w}/Bw^2$ の関係と式(6)の組み合わせにより、 δC_D は式(8)のように求まる。

$$\delta C_D = -\frac{1}{B} \delta \dot{w} \frac{1}{w^2} \delta z = \frac{1}{B} \frac{2}{\tau^2 n^2} \frac{1}{w^2} \delta z \quad (8)$$

3.1.2 LS 法

ここでは、LS 法における速度 w_{Δ}^{LS} と w_{Δ} との間には、 $w_{\Delta}^{LS} \cong w_{\Delta}$ の関係が成り立つとする。このことから、 δz の付加は速度 w_{Δ}^{LS} に影響を及ぼさないとする。このとき、加速度 w_{Δ}^{LS} の算出結果を式(9)に示す。

$$\dot{w}_{\Delta}^{LS} = \dot{w}^{LS} - \frac{30}{\tau^2(2n+1)(2n-1)(2n+3)} \quad (9)$$

ここからは、従来法と同様の手順で、加速度の誤差量 $\delta \dot{w}^{LS}$ および空力係数の誤差量 δC_D^{LS} を算出する。それぞれの算出結果を式(10)および式(11)に示す。

$$\delta \dot{w}_{LS} = -\frac{30}{\tau^2(2n+1)(2n-1)(2n+3)} \delta z \quad (10)$$

$$\delta C_D^{LS} = \frac{1}{B} \frac{30}{\tau^2(2n+1)(2n-1)(2n+3)} \frac{1}{w^2} \delta z \quad (11)$$

3.2 補間法の評価

式(8)と式(11)について、 n の値を 1 から 100 まで増加させ、 δC_D および δC_D^{LS} の値を比較する。ただし、 n 以外のパラメータはすべて 1 として算出する。このことで、それぞれの補間法における推定精度を評価する。

縦軸を δC_D および δC_D^{LS} 、横軸を n としたグラフを図 1 に示す。ただし、縦軸は対数となっている。

図 1 を見ると、 δC_D は n の増加に伴い n の -2 乗で減少するのに対し、 δC_D^{LS} では n のおよそ -3 乗で減少することがわかる。

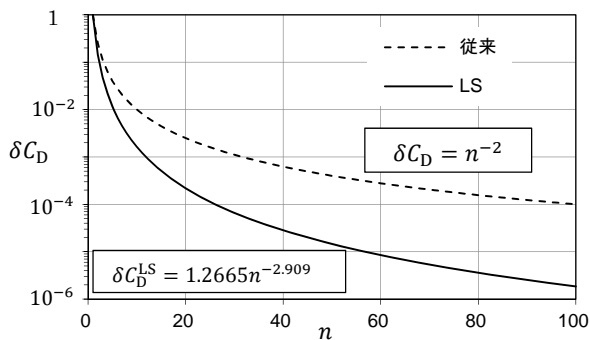


図 1 データの補間間隔と空力係数の誤差量の関係

4 実測データを用いた空力係数推定

ここでは、実際に測定されたバスケットボールの軌道データ[3]を用いた。それぞれの補間法を用いたときの、空力係数の推定結果を図 2 から図 5 に示す。これらのグラフの横軸は、投射からの時刻を表している。

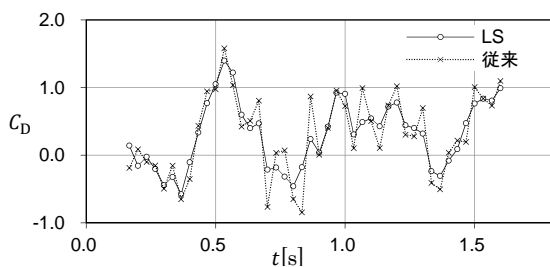


図 2 抵抗係数の比較(バスケットボール, $n = 5$)

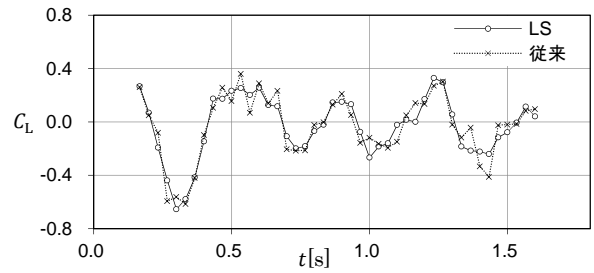


図 3 揚力係数の比較(バスケットボール, $n = 5$)

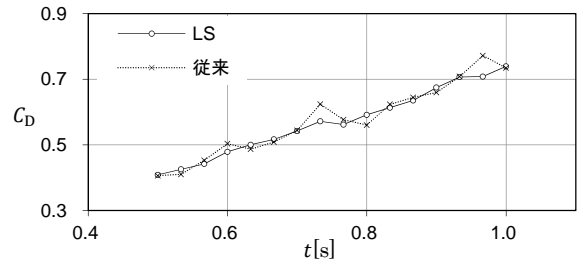


図 4 抵抗係数の比較(バスケットボール, $n = 15$)

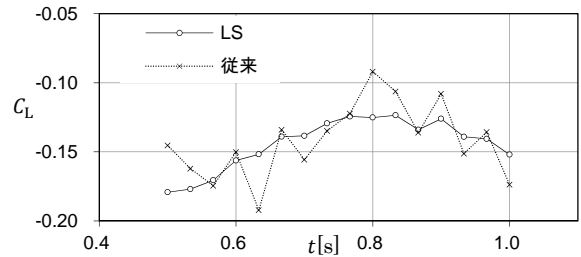


図 5 揚力係数の比較(バスケットボール, $n = 15$)

まず、図 2 と図 3 より $n = 5$ では、どちらの方法でも空力係数がばらつき、全体的な傾向は捕らえられない。

次に、図 4 と図 5 より $n = 15$ では、 C_D はどちらの方法でも、0.4 から 0.7 ほどまで上昇する傾向が見られる。一方、 C_L について、LS 法では明らかにばらつきが減少している。その結果、0.8 s 付近まで上昇後、下降していく傾向が見られる。

5 まとめ

本研究では、飛行中のボールの軌道データから局所的に空力係数を推定する方法に関連して、その推定精度を向上させる手法を検討した。従来の方は、補間する区間内の中央点と両端点の 3 点を通る 2 次関数を用いていたが、今回はこの区間内の全ての点を使った最小二乗法を試みた。

まず、測定データの位置情報に誤差を含む場合に生じる、空力係数の誤差量を算出した。そして、それぞれの補間法において、発生する空力係数の誤差量を比較した。その結果、最小 2 乗法の方が、誤差が減少することが分かった。また、それぞれの補間法を用いて、実測された軌道データから空力係数の推定を行った。その結果、従来法では捕えられなかった空力係数の傾向を明らかにできた。

参考文献

- [1]安田, 坪井, 田中, 宮寄: 軌道の特徴量を用いたボールの空力係数の推定法, 日本機械学会論文集 2014, Vol. 80, No. 814, pp. 1-9
- [2]杉山: ボール軌道の局所の特徴量を用いた空力係数の推定, 茨城大学大学院理工学研究科知能システム工学専攻修士学位論文 2015
- [3]西: 軌道の位置情報を用いたボールの空力係数の推定法, 茨城大学知能システム工学科卒業論文 2013