軌道による空力係数の推定誤差における補間法の影響

Effect of Interpolation to Relative Error of Aerodynamic Coefficients Estimation with Trajectory

発表者：石塚　雅人　　　指導教員：坪井　一洋

1　はじめに

ボールに働く空力の特性は一般に風洞実験により測定される[1]．このとき，固定されたボールに一様な定常流を送ることにより測定している．しかし，飛翔中のボールは回転や加減速するため，ボール周りの気流は非定常流となる．

最近，投射されたボールの軌道から空力係数を推定する研究が行なわれている．これらの研究では，風洞実験では調べられなかった空力係数の非定常性を示唆する結果が得られている．しかし，軌道が正確に測定されない場合や測定時間間隔が短い場合には推定結果にばらつきが生じる問題があった．

そこで，本研究では軌道データから空力係数の推定誤差の精度を検証する．そのため，軌道から速度および加速度を求める際に生じる打切り誤差および測定誤差を考慮することで空力係数の誤差評価を行う．特に，データ補間に最小二乗法と３点の単純な補間を用いた場合の誤差を比較することで最適な補間間隔と最小値について評価する．

2　誤差解析

本研究では，速度および加速度を求める際に最小二乗法による補間を用いる[2]．速度および加速度を求める際に$2n+1$点の軌道データから最小二乗法による近似を用いているため，軌道データから得られた速度および加速度には打切り誤差が生じる．また，軌道データは常に正確に測定できるとは限らない．そのため，軌道データの中央点に測定誤差δzが含まれているとする．

打切り誤差および測定誤差を考慮したときの速度$w_{LS\Delta}$と加速度$\dot{w}_{LS\Delta}$はそれぞれ(1)式と(2)式となる．

$$w_{LS\Delta} = w + \frac{1}{30}(n\tau)^2\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\frac{d^3z}{dt^3} + \frac{1}{840}(n\tau)^4\left(3+\frac{6}{n}-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)\frac{d^5z}{dt^5} + O(\tau^6) \tag{1}$$

$$\dot{w}_{LS\Delta} = \dot{w} - \frac{30}{(n\tau)^2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}\cdot\frac{|\delta z|}{2n+1} + \frac{1}{84}(n\tau)^2\left(6+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}\right)\frac{d^4z}{dt^4} + O(\tau^4) \tag{2}$$

ただし，式中のαとβは次式で与えられる．

$$\alpha = \frac{1}{30w}\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\frac{d^3z}{dt^3} \tag{3}$$

$$\beta = \frac{1}{840w}\left(3+\frac{6}{n}-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)\frac{d^5z}{dt^5} \tag{4}$$

速度および加速度に対する誤差を考慮した抵抗係数を$C_D+|\delta C_\mathrm{D}|$とすると，抵抗係数の相対誤差は（5)式で表せる．

$$\frac{|\delta C_D|}{C_D} = \frac{1}{g-\dot{w}}\left\{\left(-\frac{1}{84}\left(6+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}\right)\frac{d^4z}{dt^4} - 2\alpha(g-\dot{w})\right)(n\tau)^2 + \frac{30}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}\left(\frac{1}{(n\tau)^2} - 2\alpha + (3\alpha^2 - 2\beta)(n\tau)^2\right)\frac{|\delta z|}{2n+1} + O(\tau^4)\right\} \tag{5}$$

3　誤差評価

実測データから推定された抵抗係数と今回求めた抵抗係数の推定誤差を比較する．実測データは自由落下する卓球ボールのデータを使用した．条件は測定誤差$|\delta z| = 0.015\ \mathrm{m}$，補間間隔$n=30$，測定時間間隔$\tau = 1/240$，終端速度$w_\infty = 9.5\ \mathrm{m/s}$とした．

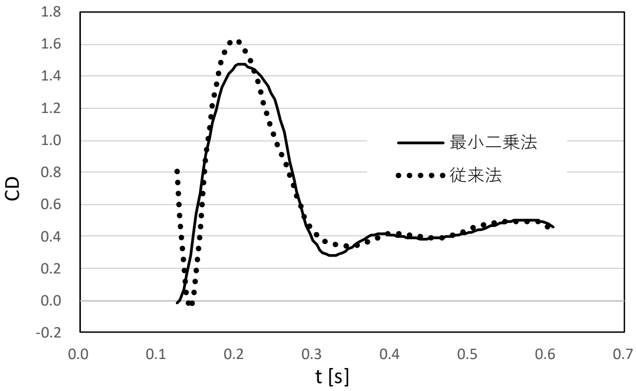

図１　抵抗係数（実測データ，$n=30$）

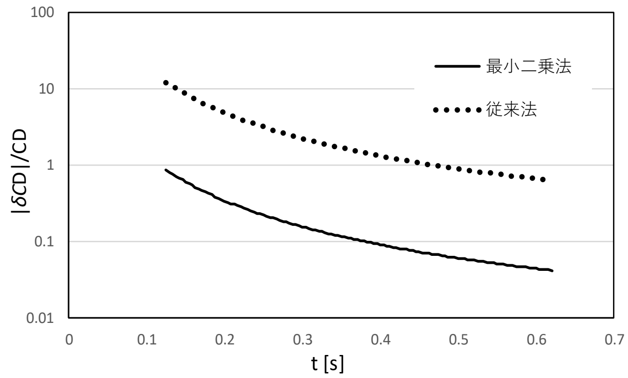

図２　抵抗係数の推定誤差（$n=30$）

実測データから推定された抵抗係数を図１に，(5)式から得られた推定誤差のグラフを図２に示す．図１の縦軸は抵抗係数，図２の縦軸は抵抗係数の相対誤差である．また比較するため横軸はどちらも時間としている．

図１では時間が小さい時に二つの補間法の間で抵抗係数値の不一致が大きく，$t = 0.4$ s以降でその差はほとんどなくなっている．図２では，時間が小さいほど推定誤差が大きくなっている．例えば$t = 0.2$ sの時，従来法は抵抗係数が約 1.63，誤差は最大 488%であり，最小二乗法は抵抗係数が約 1.46，誤差は最大 34%である．図１の二つのグラフの差はこの誤差の範囲内にある．これらのことから誤差により抵抗係数が異なっていることが考えられる．

次に自由落下する卓球ボールの抵抗係数の推定精度を評価する．条件は測定誤差$|\delta z| = 0.001$ m，　測定時間間隔$\tau = 1/240$，終端速度$w_\infty = 9.5$ m/s，時刻 $t = 0.5$ sとする．測定誤差の値はミリ単位の測定誤差による抵抗係数への影響を評価するためである．(5)式と従来法[3]の評価結果を図３に示す.

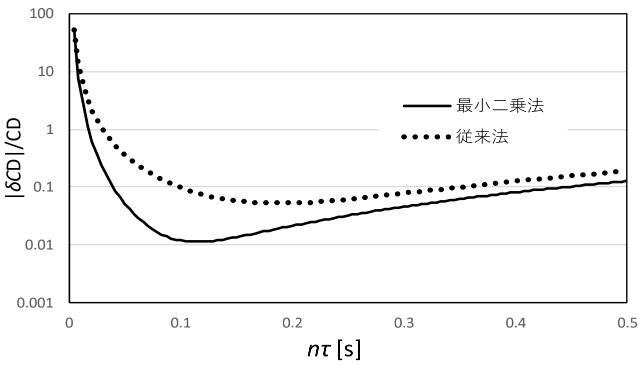

図３　$|\delta C_D|/C_D$の評価結果

図３では横軸は$n\tau$，縦軸は相対誤差$|\delta C_D|/C_D$とした．この結果からどちらも最小値が存在することが確認できる．その値は，従来法で$n\tau = 0.1875$のとき相対誤差は$|\delta C_D|/C_D = 5.26\%$に対して最小二乗法では$n\tau = 0.1125$で$|\delta C_D|/C_D = 1.13\%$となっている．

最小二乗法の方が誤差は小さくなるが最適な補間間隔からずれた時の誤差の勾配が従来法より大きい．

4　最適な補間間隔

(5)式を$n\tau$の関数として考え$n\tau$で微分しその右辺を0とすると最適な補間間隔が求まる．そのとき(6)式のようになる．

$$(n\tau)^4 = \frac{A}{C} \tag{6}$$

$$A = \frac{30}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n}\right)} \cdot \frac{|\delta z|}{2n + 1} \tag{7}$$

$$C = \frac{30}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n}\right)} \cdot \frac{|\delta z|}{2n + 1}(3\alpha^2 - 2\beta) - \frac{1}{84}\left(6 + \frac{6}{n} - \frac{5}{n^2}\right)\frac{d^4 z}{dt^4} - 2\alpha(g - \dot{w}) \tag{8}$$

(6)式から求めた$n\tau$と(5)式から直接推定誤差が最小値をとったときの$n\tau$を比較する．図４は従来法[3]，図５は最小二乗法のものである．

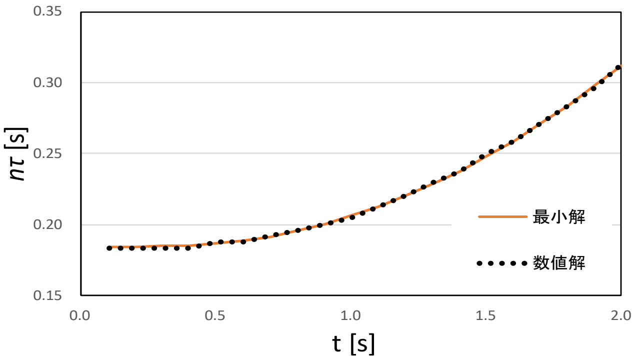

図４　最適な補間間隔の比較（従来法）

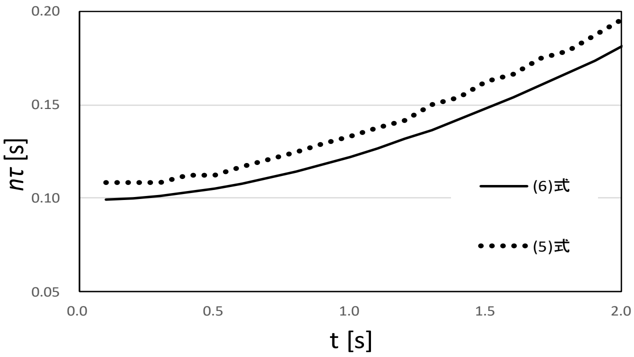

図５　最適な補間間隔の比較（最小二乗法）

図４では値がほぼ一致することが分かる．これは最小解からだけでなく数値解から最適な補間間隔を求めることが出来ることを示している．

一方で、図５では値が違っている．(6)式から最適な補間間隔はおおよその値しか求められないことが分かる．

5　まとめと今後の課題

本研究では軌道データを用いた空力係数推定におけるデータ補間が推定精度に与える影響について検証した．特に，データ補間法として一般的な最小二乗法を用いた場合の推定精度を明らかにすることが目的である．最も簡単な１次元問題である自由落下する球の条件下でその推定精度を求めた．

その結果，３点のデータ点を用いる単純な補間の場合と同様に抵抗係数の相対誤差に最小値が存在することが確認できた．さらに，３点補間に比べて最小二乗法では相対誤差の最小値が小さく、またそのときの補間間隔も小さくなることがわかった．

推定誤差と実測データとの比較では抵抗係数の値が補間法によって異なることが誤差によるものだと考えられることが分かった．

今後は，最小二乗法での最適な補間間隔はおおよその値しか求められず他の方法を考える必要がある．より最適な補間間隔を求め，実際の測定において精度検証に利用できるように実用化したい．

参考文献

[1] Jooha Kim *et al.*: *J. Fluid Mech.*(2014),vol. 754,R2.

[2] 石塚雅人：軌道による空力係数の推定誤差における補間法の影響,中間発表レジュメ，2017

[3] 渡辺卓馬：軌道に基づく空力係数推定法における誤差解析，茨城大学院理工学研究科知能システム工学専攻修士学位論文，2017