

軌道から推定するサッカーボールの空力特性

Aerodynamic characteristics of soccer ball estimated from its flight trajectory

発表者：河尾 愛理

指導教員：坪井 一洋

1 はじめに

飛翔している放物体は、まわりの気流から力を受け、それによってその運動が影響を受ける。このような放物体の空力特性は無次元数である空力係数として表され、一般に風洞実験などで求められる[1]。

風洞実験では、人工的に発生させた気流中に物体を固定することで空力係数を測定するため、飛翔状態とは気流の条件が異なっている可能性がある。例えば、ビデオ画像から求めたサッカーボールの飛翔軌道から飛翔状態での抵抗係数を推定した結果を図1に示す[2]。この結果は、飛翔中のサッカーボールの抵抗係数が時間の経過とともに変化する傾向が大きく2つに分類できる可能性を示唆している。

本研究では、このような空力係数の異なる傾向について軌道形状や揚力係数との関連を確認するとともに、その要因について分析する。

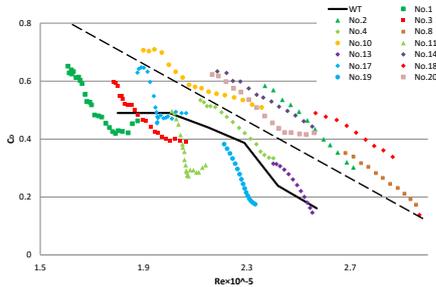


図1 先行研究による抵抗係数の傾向[2]

2 空力係数の推定法[3]

投射時の放物体の重心位置を座標原点とし、鉛直上向きに z 軸を取る。放物体には進行方向と逆向きに働く空気抵抗 \mathbf{D} 、それに直交する力 \mathbf{N} と重力が働く。 \mathbf{N} は放物体の回転によるMagnus効果などによって発生し、揚力 \mathbf{L} と横力 \mathbf{S} に分解できる。

放物体の位置ベクトルと速度ベクトルをそれぞれ \mathbf{x} と \mathbf{v} 、放物体の質量を m 、重力加速度を \mathbf{g} とすると、運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{D} + \mathbf{N} - m\mathbf{g}\mathbf{e}_z \\ &= -D\mathbf{e}_t + L\mathbf{e}_L + S\mathbf{e}_S - m\mathbf{g}\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{e}_z は z 軸方向の単位ベクトル、 \mathbf{e}_t は接線単位ベクトルであり、 \mathbf{e}_L は揚力方向の単位ベクトル、 \mathbf{e}_S は横力方向の単位ベクトルである。また、空気抵抗 \mathbf{D} 、揚力 \mathbf{L} 、横力 \mathbf{S} に対する比例係数として抵抗係数 C_D 、揚力係数 C_L 、横力係数 C_S が次のように定義される。

$$D = \frac{1}{2}\rho AC_D q^2, \quad L = \frac{1}{2}\rho AC_L q^2, \quad S = \frac{1}{2}\rho AC_S q^2 \quad (2)$$

ただし、 $q = |\mathbf{v}|$ は速さ、 ρ は空気密度、 A は放物体の断面積を表す。

放物体は3次元空間内で運動することから、空間曲線論により局所的に一般3次曲線で近似される。そこで、Frenet-Serretの式より得られる局所正規直交基底 $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b)$ と運動方程式より、空力係数は次式で求められる。

$$\begin{aligned} C_D &= -\frac{2m}{\rho A q^2}(\dot{q} + g(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z)), \\ C_L &= \frac{2m}{\rho A q^2} \left(\frac{\mathbf{N}}{m} \cdot \mathbf{e}_L \right), \quad C_S = \frac{2m}{\rho A q^2} \left(\frac{\mathbf{N}}{m} \cdot \mathbf{e}_S \right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、式中の \cdot は時間微分である。

次に運動方程式を微分することで躍度を求める。

$$m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{N}} = -\dot{D}\mathbf{e}_t - D\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{\mathbf{N}} \quad (4)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{N}}$ を \mathbf{e}_t 、 \mathbf{e}_n と \mathbf{e}_b の各成分に分解することで次の2式が得られる。ただし、 κ と τ はそれぞれ曲率と捩率である。

$$\dot{D} = m(\kappa^2 q^3 - \dot{q}) - \kappa q N e_n \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = (-\kappa q N e_n)\mathbf{e}_t + (mq(3\kappa\dot{q} + \dot{\kappa}q) + D\kappa q)\mathbf{e}_n + (m\kappa\tau q^3)\mathbf{e}_b \quad (6)$$

抵抗に垂直な力 \mathbf{N} がマグヌス力の場合、回転軸ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて次式で定義される。

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2m}\rho AC_N r(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \equiv K\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (7)$$

ここで、 r は放物体の回転半径、 C_N はマグヌス力の係数とし、いくつかの定数を係数 K としてまとめてある。

式(7)の時間微分と式(6)から $K\boldsymbol{\omega}$ は次式のように表せる。

$$K\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{v}}{q^2} + \left(m\left(\tau - \frac{1}{\kappa q^2} \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_b)}{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_n)} \right) \left((3\kappa\dot{q} + \dot{\kappa}q) + \kappa \frac{D}{m} \right) \right) \mathbf{v} \quad (8)$$

3 結果

3.1 軌道データの分類

ビデオ撮影されたサッカーボールの動画画像から求められた13個の2次元軌道データをその形状に応じてグループAとBに分類し、軌道データの z 座標の最大値と最小値、およびその差を求めた。

グループAとBの差の範囲を比較すると、グループAは差が1.04~2.61m程度と小さくその形状が平

坦である。一方、グループ B は 2.35~5.52m と差が大きい。このことからグループ A の軌道は B と比べて揚力の影響が大きいと予想できる。

3.2 揚力係数の推定結果

軌道は最小二乗法によって時間の 3 次関数として補間する。補間に用いるデータ点数は 21 点とした。

図 2 と図 3 は推定した揚力係数を A と B のグループ毎にまとめたものである。横軸はボールの飛行速度を無次元化したレイノルズ数(Re)である。

グループ A は揚力係数の変化が小さいが、グループ B は変化が大きい。すなわち揚力係数も軌道の分類によって 2 つの傾向に分かれることがわかる。

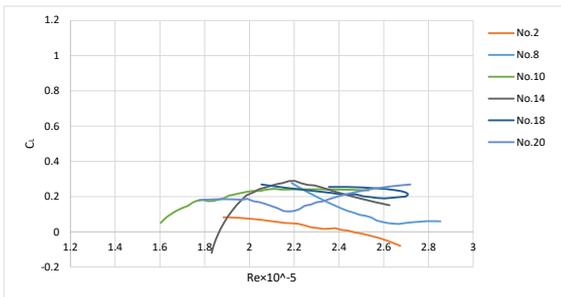


図 2 揚力係数の推定結果 (グループ A)

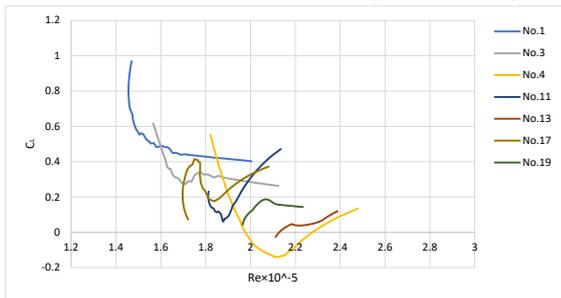


図 3 揚力係数の推定結果 (グループ B)

3.3 回転の推定結果

グループ毎にまとめた回転の推定結果を図 4 と図 5 に示す。横軸は $K\omega/q$ 、縦軸は揚力係数 C_L である。これらの結果から、グループ A は C_L と $K\omega/q$ の値の変化する範囲が狭く、グループ B は広いことが分かる。

また、飛行速度 q と $K\omega$ それぞれに対して最大値と最小値の差を取り、それらの比を調べた結果を図 6 に示す。

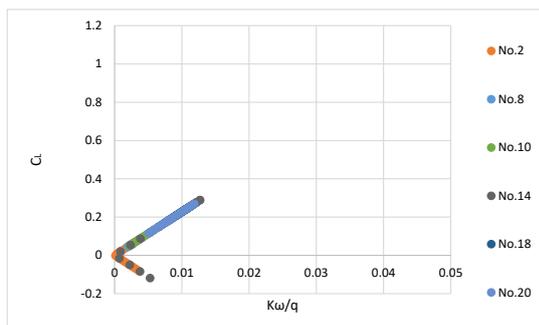


図 4 回転の推定結果 (グループ A)

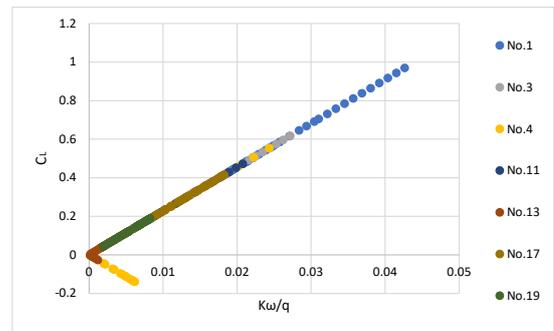


図 5 回転の推定結果 (グループ B)

図 6 ではグループ A のデータを青枠内に示すが、その値は 0.04 付近を境に軌道グループ A と B によって分けることができた。また、グループ A のほうが B よりも $\Delta K\omega/\Delta q$ が小さい値となった。このことは、グループ A より B のほうが速度の変化に対する回転の変化が大きいことを意味する。これは、グループ A よりも B のほうが Δq が小さく、 $\Delta K\omega$ も一般に大きいため、その比に違いが生じたと考えられる。

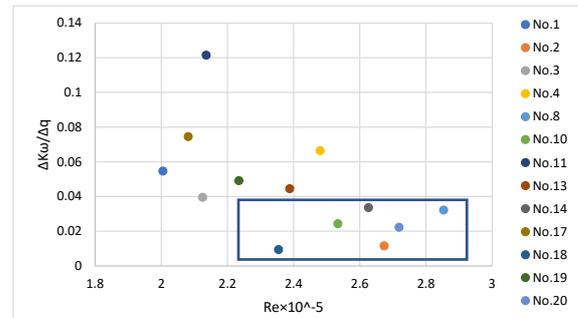


図 6 $\Delta K\omega/\Delta q$ の結果

4 まとめと今後の課題

本研究では、飛行時のサッカーボールの位置データから空力係数などを推定し、その傾向を分析することを試みた。

2 次元軌道データより、軌道の高低差が小さいグループと大きいグループに分類し、それらの抵抗係数と揚力係数が異なる傾向を示すことを確認した。

さらに、マグヌス力の係数と回転数の積を調べたところ、この傾向もグループによって異なることがわかった。そして、この積を速度で割ったスピン率に対応する値の変動幅にグループごとの特徴が見られた。

ここで提示した手法により、飛行軌道から飛行体の空力係数だけでなく、その回転状態についても推定できる可能性が示された。

参考文献

- [1]Ed. Regis : Scientific American (online), (2020)
- [2]渡辺他：日本機械学会 シンポジウム：スポーツ工学・ヒューマンダイナミクス 2016 講演論文集, A-24 (2016)
- [3]森村, 坪井：日本機械学会 2020 年度茨城講演会講演論文集, 104 (2020)