

軌道形状を用いたボールの空気力係数の推定法

Estimation for Aerodynamic-Force Coefficients of a Ball with Orbital Shape

発表者: 桑原 宙大

指導教員: 坪井 一洋

1. はじめに

ゴルフのドライバーショットは球技の中でも特別な飛び方をみせる。ドライバーショットの打ち出しは直線的に飛ぶが、ある距離を境に上方向に弧を描くようになる。このような飛び方はホップといわれ、ゴルフのドライバーショットに特有の軌道である。

この軌道はボールの形状（ディンプル）とボールの回転の影響から生み出される軌道である。この軌道はドライバーショットによって打ち出されたボールに働く空気力が、時々刻々と変化していることを意味している。

本研究では、投射されたボールによって描かれる軌道を用いて、空気力係数を推定する方法を提案する。さらに、提案した推定法の妥当性と信頼性を確認するため、例題を用いて推定法の検証を行う。そして、サッカーボールによって描かれる軌道形状から、ボールに働く空気力係数の推定を行った。

2. 空気力係数の推定法

ボールの重心の位置ベクトルを (x, y) 、速度ベクトルを (u, v) とすると、 $q^2 = u^2 + v^2$ である。また、 m および g はボールの質量と重力加速度とし、 d はボールの直径とする。

軌道の一部分を 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で補間することを考える。このとき、時刻 $t = t_1, t_2, t_3$ での軌道上の 3 点の座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とする。ただし、 $x_1 < x_2 < x_3$ である。

これら 3 点の座標を通る 2 次関数の係数はそれぞれ以下となる。

$$a = \frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$b = \frac{1}{x_3 - x_1} \left((x_3 + x_2) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - (x_2 + x_1) \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right)$$

$$c = y_3 - \frac{x_3^2}{x_3 - x_1} \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) + \frac{x_3}{x_3 - x_1} \left((x_3 + x_2) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - (x_2 + x_1) \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right)$$

この補間式を用いると時刻 $t = t_2$ での揚力は、次のように

表される。

$$l = \frac{mu}{q^3} (2au^2 + g) \quad (1)$$

同様に時刻 t における座標を 2 次関数で補間すると、

$$x(t) = a_x t^2 + b_x t + c_x$$

$$y(t) = a_y t^2 + b_y t + c_y$$

と書ける。これより抵抗に対して次式が導かれる。

$$k = -\frac{m}{q^3} \{2a_x u + v(2a_y + g)\} \quad (2)$$

式(1)と式(2)を用いた空気力係数の推定法の手順は以下のようにまとめられる。

手順 1 : 時間間隔 Δt で軌道上の 3 点の座標を求める。

$$\text{すなわち } t_1 = t_2 - \Delta t, \quad t_3 = t_2 + \Delta t.$$

手順 2 : 軌道上の 3 点の座標と時刻 t_1, t_2, t_3 から、軌道の補間を用いて $y(x)$ と $x(t), y(t)$ の 3 つの 2 次関数の各係数を求める。

手順 3 : 補間式 $x(t)$ と $y(t)$ を用いて時刻 $t = t_2$ における u, v と q を求める。

手順 4 : 手順 2 と手順 3 で求めた値を式(1)と式(2)に代入し、抵抗 k と揚力 l の値を求める。

手順 5 : 求めた抵抗 k と揚力 l の値から定義式

$$k = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_D, \quad l = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_L$$

を用いて抵抗係数 C_D と揚力係数 C_L を求める。

3. 推定法の検証

3. 1 推定精度

ここでは時間的に変化しない抵抗係数と揚力係数を考える。表 1 の計算条件で投射された軌道を数値的に計算し、 Δt 秒間隔でボールの座標 (x, y) を求めた。

表 1 計算条件^[1]

初速度(m/s)	初速角(°)	抵抗係数 C_D	揚力係数 C_L
50	45	0.24	0.25

空気力係数の推定精度を確認するために、 Δt を 1.0 秒、0.5 秒、0.1 秒と変えて、各係数の推定を行った。求めた結果を図 1 と図 2 に示す。

これらの結果より $\Delta t = 0.1$ のとき、すべての時刻で各係数値が目標値と一致した。つまり、 Δt を 0.1 秒以下とす

ることで、空気力係数の正確な推定が可能となる。

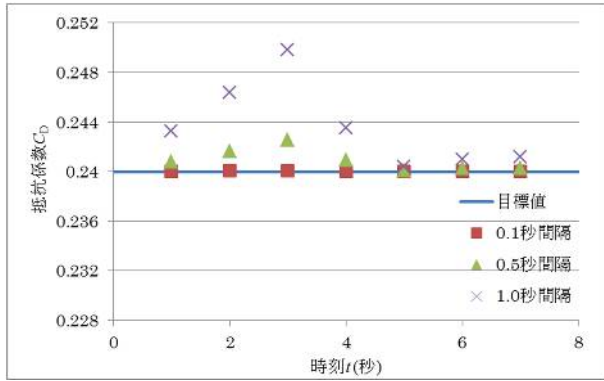


図1 抵抗係数 C_D の推定結果

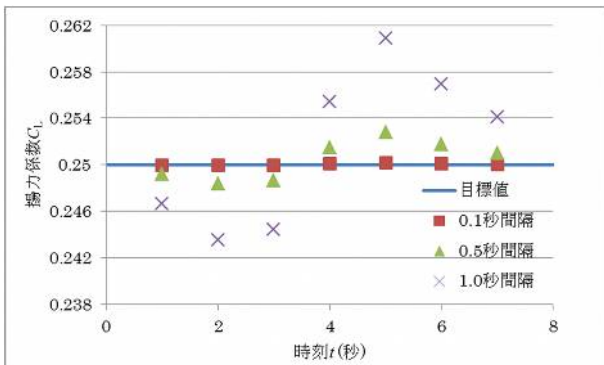


図2 揚力係数 C_L の推定結果

3. 2 変化する空気力係数の推定

飛翔中の投射体に働く空気力は時々刻々と変化し、それに伴い抵抗係数と揚力係数の値が変化する。このように抵抗係数と揚力係数が変化する場合について、推定法による検証を行った。計算条件を表2に示す。

このとき、抵抗係数 C_D と揚力係数 C_L の計算には次式^[2]を用いた。

$$C_D = -0.0348\alpha^2 + 0.2881\alpha + 0.3365$$

$$C_L = -0.5554\alpha^2 + 0.801\alpha + 0.1184$$

ここで、 $\alpha = \pi n d / q$ で n は回転数である。

上式によって求められる抵抗係数と揚力係数を目標値とし、推定法による抵抗係数(C_D)、揚力係数(C_L)との比較を表3に示す。さらに、相対誤差(ϵ_D , ϵ_L)の値も示した。

表3の結果より抵抗係数と揚力係数の相対誤差は 10^{-5} 程度であり、目標値と推定値の誤差は十分小さい。これより抵抗係数と揚力係数が時間的に変化する場合においても十分に正確な推定が可能である。

表2 計算条件^[3]

初速度(m/s)	投射角(°)	回転数(rps)	時間間隔 Δt (秒)
36.7	28.8	37.6	0.1

表3 結果の比較

t	C_D (目標値)	ϵ_D	C_L (目標値)	ϵ_L
1	0.42196 (0.421991)	7.34×10^{-5}	0.314832 (0.315021)	6.0×10^{-4}
2	0.44309 (0.4431)	2.26×10^{-5}	0.344566 (0.344722)	4.53×10^{-4}
3	0.445343 (0.445367)	5.39×10^{-5}	0.347356 (0.347382)	7.48×10^{-5}
4	0.428779 (0.428792)	3.03×10^{-5}	0.325511 (0.32549)	6.45×10^{-5}

3. 3 実測データへの適用

サッカーボールの飛翔中の画像を用いた推定を行った。このとき、サッカーボールが最も高く飛んだ座標とその時刻から ± 0.5 秒の座標を用いた。

その結果、推定した抵抗係数と揚力係数はそれぞれ $C_D=0.191361$, $C_L=0.196585$ となった。

他の方法で同じサッカーボールの空気力係数を推定した結果^[4]では、抵抗係数 $C_D=0.12\sim 0.31$, 揚力係数 $C_L=0.12\sim 0.26$ であり、今回の結果はともにこの範囲内にある。これより実測データに対しても本推定法が有効であることが確認できる。

4. まとめ

本研究ではボール軌道を用いて飛翔中のボールに働く空気力係数を推定する方法を提案した。そして、例題による精度の検証を行い、本推定法の妥当性と信頼性を確認した。また、実測データを用いて、サッカーボールの空気力係数を推定した結果、妥当な値を得ることができた。これより、空気力が変化する場合や空気力が直接測定できない場合でも、本方法により空気力係数を推定することが可能である。

参考文献

- [1] 山口, 川松: シミュレーション, Vol.22, No.1, pp.21-25 (2003年)
- [2] 坂本, 長谷川 et al.: 日本機械学会シンポジウム, スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス講演論文集, pp.532-535(2011)
- [3] 城所, 若原, 矢内: 日本機械学会スポーツ工学シンポジウム, シンポジウムヒューマン・ダイナミクス講演論文集, pp.229-233(2009)
- [4] 安田, 坪井: 第20回日本機械学会茨城講演会講演論文集, pp.27-28(2012)