

回転型オイラー方程式を用いた高精度差分スキームの導出

Derivation of High Accuracy Finite Difference Scheme Based on Euler Equation in Rotational Form

発表者 湊 正信 担当教官 坪井 一洋

To construct a method of calculating incompressible flow with high accuracy is one of the important problems in CFD. In this research, we propose a new finite difference scheme based on the fact that Euler equation of inviscid flow is the similar form to the state equation of modern control theory. Also, some computational results of 2D cavity flow are shown.

1. はじめに

水や空気に代表される流体の流れはわれわれの生活にとって身近な存在であると同時に、様々な工学分野にも現れる現象である。このような現象を計算機上でのシミュレーションによって再現する技術は計算流体力学(Computational Fluid Dynamics: CFD)と呼ばれ、あらゆる工学分野においてその重要性が増してきている。

計算流体力学における基本的で重要な問題の一つとして非圧縮性流れに対する計算法の確立がある。連続の条件を満足する流速ベクトルを精度良く効率的に求める方法は未だに知られていない。本研究では非粘性流れに対するオイラー方程式が制御工学における状態方程式と同じ形に書けることに着目して、新しい非圧縮性流れの計算法を提案する。

2. 流れの基礎方程式

粘性流体の流れの運動は、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式(NS 方程式)と連続の式で表される。^[1]

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{u} は流速ベクトル、 P は圧力、 Re はレイノルズ数という無次元パラメータである。

また、非粘性非圧縮性流体の運動を表した式をオイラーの方程式と呼び、その式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P \quad (2)$$

で与えられる。(1)式と(2)式を比較すると、粘性を表す項は非圧縮性 NS 方程式の右辺最終項に現れていることがわかる。

今、2次元流れ $\mathbf{u} = (u, v)$ を考えると、渦度 w を含む反対称行列 \mathbf{O} 、全圧 H を

$$\mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}, \quad H = P + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

と定義するならば、(2)式は以下に示す回転型と呼ばれる形に変形することができる。^[2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = -\mathbf{O}\mathbf{u} - \nabla H \quad (3)$$

3. 定式化

3.1 回転型オイラー方程式の解

$\mathbf{U}(t)$ をシステムに対する入力、 $\mathbf{X}(t)$ を状態ベクトルとしたとき

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \quad (4)$$

の形で表された式を制御工学では状態方程式(state equation)と呼び、その解は

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 & (\mathbf{U}(t) = 0) \\ \mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau & (\mathbf{U}(t) \neq 0) \end{cases} \quad (5)$$

と与えられる。ここで、 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0$ 、また $e^{\mathbf{A}t}$ は次のように定義される。

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots$$

(3)式と(4)式の形に注目すると、流速ベクトルが状態ベクトル、全圧の勾配がシステムへの入力に対応していることが分かる。このことから(5)式をもとに(3)式の解が求められる。ここでは、渦度 w が一定とみなせる程度の微小な時間間隔 Δt を考え、 $t_n = n\Delta t$ として微小な時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ について求めた。

$$\mathbf{u}^{n+1} = e^{-\mathbf{O}\Delta t} \mathbf{u}^n - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(e^{-\mathbf{O}(t_{n+1}-t)} \nabla H \right) dt \quad (6)$$

ただし、

$$e^{-\mathbf{O}t} = \begin{pmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -\sin wt & \cos wt \end{pmatrix}$$

3.2 高精度差分スキーム

(6)式を(1)式の連続の式へと代入することにより、

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \mathbf{u}^n \cos \mathbf{w} \Delta t + \mathbf{w}^n \sin \mathbf{w} \Delta t \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \cos \mathbf{w}(t_{n+1} - t) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \right\} dt \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \cos \mathbf{w}(t_{n+1} - t) - \frac{\partial}{\partial y} \sin \mathbf{w}(t_{n+1} - t) \right\} \frac{\partial H}{\partial x} \right] dt \quad (7) \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \sin \mathbf{w}(t_{n+1} - t) + \frac{\partial}{\partial y} \cos \mathbf{w}(t_{n+1} - t) \right\} \frac{\partial H}{\partial y} \right] dt
\end{aligned}$$

を得る. また, (2)式を時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で積分することにより

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \mathbf{O} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} dt - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \nabla H dt \quad (8)$$

となる. 本研究では, (7)式と(8)式をそれぞれ空間方向, 時間方向に 2 次の精度を持つ中心差分, 台形公式を用いて差分式を求めた.

4. 時間分割法

オイラー方程式をもとに(8)式を導出した. そのため(8)式には粘性が考慮されていない. 粘性を考慮した NS 方程式とオイラー方程式を比較すると, 粘性は NS 方程式の右辺最終項で表されていることがわかる. そこで, 本研究では NS 方程式の時間進行を非粘性部分と粘性部分に分割する時間分割法を用いる.

具体的には, 時間間隔 Δt を 2 つに分け, $[t_n, t_{n+1/2}]$ で非粘性部分, $[t_{n+1/2}, t_{n+1}]$ で粘性部分を計算する. つまり,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\mathbf{O} \mathbf{u} - \nabla H & t_n \leq t \leq t_{n+1/2} \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{u} & t_{n+1/2} \leq t \leq t_{n+1}
\end{aligned}$$

これにより, (6)式で表された非粘性解に近似的に粘性効果を導入することができる.

5. 2次元 Cavity 流れへの適用

粘性流れのモデルとして 2 次元 Cavity 流れを用いて, 今回導出した式の検証を行う. 格子サイズ 40×40 , $\Delta t = 10^{-3}$, 格子間隔 2.5×10^{-2} , $\operatorname{Re} = 100$ という条件で計算を行った. Fig.1 に流速の分布, Fig.2 に連続の式の値の分布を, Table 1 には求めた流速の値の精度と, 従来の計算方法である MAC 法との比較を記した. その結果, 流速の分布は 2 次元 Cavity 流れの特徴を示し, 連続の式の値は計算領域中の左上上部の一部を除き, ほぼ均一となっている. また, 本研究で提案した差分スキームは従来の MAC 法と比べて 4 倍程度精度が向上している.

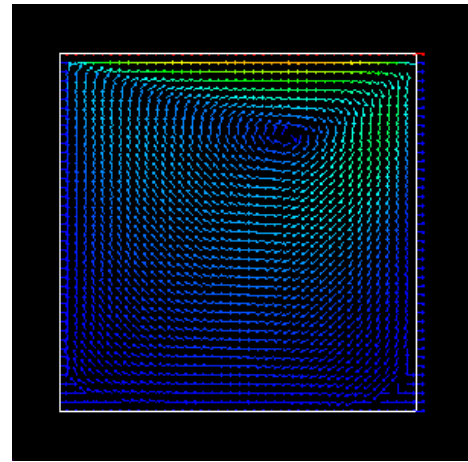


Fig.1 流速の分布(t=10.0)

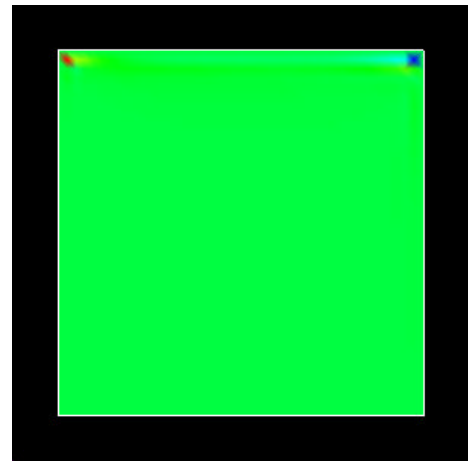


Fig.2 連続の式の値の分布(t=10.0)

Table 1 連続の式の精度

	本研究の精度	MAC 法の精度
$ \operatorname{div} \mathbf{u} $	80.826	320.113
max	7.618	13.413
min	-6.069	-5.579

6. まとめ

今回, 回転型のオイラー方程式が制御工学における状態方程式と同じ形に書けることに着目し, 時間方向に 2 次の精度をもった差分スキームを導出した. また, 時間分割法を導入することで本手法を粘性流れに拡張し, 2 次元 Cavity 流れに適用した. その結果, 従来の MAC 法より精度が良くなることを確認した. ただし, 今回の結果では圧力分布に振動がみられ, その原因について調べる必要がある.

参考文献

- [1] 水野明哲 流れの数値解析入門, 朝倉書店 第 1 章 (1990)
- [2] 棚橋隆彦, 斉藤恒洋 粘性流体の非定常流れの数値解析アルゴリズム(GSMAC 法について), 京都大学数理解析講義録, 548, p.133 (1985)