

軌道形状から推定した放物体の空力特性

Aerodynamic characteristics of a projectile estimated from its trajectory

発表者: 森村 和馬

指導教員: 坪井 一洋

1 はじめに

飛翔中の放物体は空気中を移動し周りの気流から流体力を受けている。その流体力は放物体の飛翔軌道に大きな影響を与えている。放物体の軌道の特徴づけるものとして空力係数がある。空力係数とは空気から受ける力を無次元化したものであり、一般的に風洞実験で求められる。

風洞実験では、一様流中に物体を固定し空力係数を計測している。そのため、風洞実験ではある流速に対してひとつの値のみ求めることができ、空力係数の時間変化を得ることはできない。また、飛翔中の放物体は加減速しているため、周りの空気の流れは常に変化しており風洞実験とは条件が異なっている [1]。

そこで、風洞実験とは異なる手法として飛翔中の放物体の位置データを用いて空力係数を推定する研究が行われている [2]。先行研究では、位置データから速度と加速度を求めることで、時々刻々と変化する空力係数が推定された。

本研究では放物体の軌道形状に基づき、その位置データから軌道の幾何学量、放物体の空力係数および空力係数の時間微分を推定することを試みる。そして、3次元の実測データから各係数の推定を行うとともに、その結果から放物体に働く流体力の非定常性について考える。

2 空力係数の推定

放物体の投射位置を座標原点とし、鉛直上向きを z 軸とする。そして、初速度が x - z 平面に含まれるように x 軸を定義し、座標系が右手系となるように y 軸をとる。放物体には重力 g 、進行方向と逆向きに働く空気抵抗 \mathbf{D} とそれに直交する力 \mathbf{N} が働く。また、 \mathbf{N} は放物体の回転による Magnus 効果などにより発生する力であり、揚力 \mathbf{L} と横力 \mathbf{S} に分解できるため、放物体の運動方程式は次のように書ける。

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{D} + \mathbf{N} - mg\mathbf{e}_z$$

$$= \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{S} - mg\mathbf{e}_z = -D\mathbf{e}_t + L\mathbf{e}_L + S\mathbf{e}_S - mg\mathbf{e}_z \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ および $\mathbf{v} = (u, v, w)$ はそれぞれ放物体の位置ベクトルと速度ベクトル、 m を放物体の質量、 g を重力加速度、 \mathbf{e}_z を z 軸方向の単位ベクトル、 \mathbf{e}_t を軌道の接線単位ベクトル、 \mathbf{e}_L と \mathbf{e}_S をそれぞれ揚力と横力の方向の単位ベクトルとする。

放物体の軌道は3次元空間内で曲線を描く。空間曲線論によると空間曲線は局所的に一般3次曲線で近似される [3]。そのため、Frenet-Serret の式に基づいて曲線上で局所正規直交基底を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_t &= \kappa q \mathbf{e}_n \\ \dot{\mathbf{e}}_n &= -\kappa q \mathbf{e}_t + \tau q \mathbf{e}_b \\ \dot{\mathbf{e}}_b &= -\tau q \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 κ と τ は曲率と捩率、 \mathbf{e}_n と \mathbf{e}_b はそれぞれ主法線と従法線の単位ベクトルである。なお、式中の \cdot は時間微分

を表わし、 $q = |\mathbf{v}|$ は速度の大きさである。このとき、放物体の速度から、加速度と加速度の変化率(躍度)は Frenet-Serret の式より次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{x}} = q \mathbf{e}_t \\ \dot{\mathbf{v}} &= \dot{q} \mathbf{e}_t + q \dot{\mathbf{e}}_t = \dot{q} \mathbf{e}_t + \kappa q^2 \mathbf{e}_n \\ \ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{q} - \kappa^2 q^3) \mathbf{e}_t + (3\kappa \dot{q} + \dot{\kappa} q) q \mathbf{e}_n + \kappa \tau q^3 \mathbf{e}_b \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)の第2式は放物体の加速度を示しているため、 \mathbf{e}_t と \mathbf{e}_n の方向に分解することが可能である。よって、運動方程式は次のように書ける。

$$m\dot{\mathbf{v}} = -(D + mg(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z)) \mathbf{e}_t + \mathbf{N} - mg(\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_t) \quad (4)$$

放物体に働く流体力の大きさは一般に物体の速度の自乗に比例し、その力が働く方向に応じた流体力の比例係数として抵抗係数 C_D 、揚力係数 C_L および横力係数 C_S がそれぞれ次式で定義される。

$$D = \frac{1}{2} \rho A C_D q^2, \quad L = \frac{1}{2} \rho A C_L q^2, \quad S = \frac{1}{2} \rho A C_S q^2 \quad (5)$$

ただし、 ρ は空気密度、 A はボールの断面積である。

ここで、定数 $\alpha = 2m/\rho A$ とし、式(3)の第2式と式(5)を用いることによって空力係数は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} C_D &= -\frac{\alpha}{q^2} (\dot{q} + g(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z)) \\ C_L &= \frac{\alpha}{q^2} \left(\frac{\mathbf{N}}{m} \cdot \mathbf{e}_L \right), \quad C_S = \frac{\alpha}{q^2} \left(\frac{\mathbf{N}}{m} \cdot \mathbf{e}_S \right) \end{aligned} \quad (6)$$

3 空力係数の時間微分の推定

空力係数の時間微分は運動方程式を時間で微分した式と躍度の式より求まる。運動方程式を微分した式を以下に示す。

$$m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{N}} = -\dot{D}\mathbf{e}_t - D\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{\mathbf{N}} \quad (7)$$

ここで、式(7)を \mathbf{e}_t 、 \mathbf{e}_n と \mathbf{e}_b の各成分に分解するため、 $\dot{\mathbf{N}}$ を次のように定義する。

$$\dot{\mathbf{N}} = (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_t) \mathbf{e}_t + (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n + (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \quad (8)$$

また、速度ベクトルと \mathbf{N} は直交することから、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_t + \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{e}}_t &= 0 \\ \dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_t &= -\kappa q \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (9)$$

となり、式(7)は式(8)と式(9)より次のように書ける。

$$m\dot{\mathbf{v}} = -(\dot{D} + \kappa q \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_t + (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_n - D\kappa q) \mathbf{e}_n + (\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \quad (10)$$

式(10)と式(3)の第3式より、 \dot{D} と $\dot{\mathbf{N}}$ は次のように求められる。

$$\dot{D} = m(\kappa^2 q^3 - \ddot{q}) - \kappa q \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_n \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = (-\kappa q \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_t + (mq(3\kappa \dot{q} + \dot{\kappa} q) + D\kappa q) \mathbf{e}_n + (m\kappa \tau q^3) \mathbf{e}_b \quad (12)$$

上記の2式と式(5)を微分した式により空力係数の時間微分は求められる。

4 推定結果

TRACKMAN(TMN)を用いて測定されたゴルフボールの3次元の軌道データから各係数の推定を行う。このとき、軌道上の $2n+1$ 個の位置データを最小二乗法で補間することを考える。ここで n は補間数を表し、 $n=1$ は隣り合う3点、 $n=2$ は連続した5点の意味である[2]。推定された空力係数を図1~3に示す。

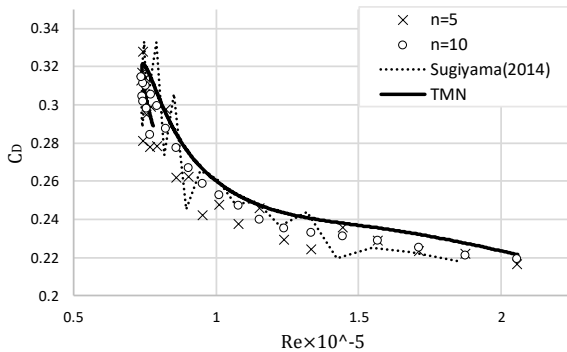


図1 抵抗係数の推定結果

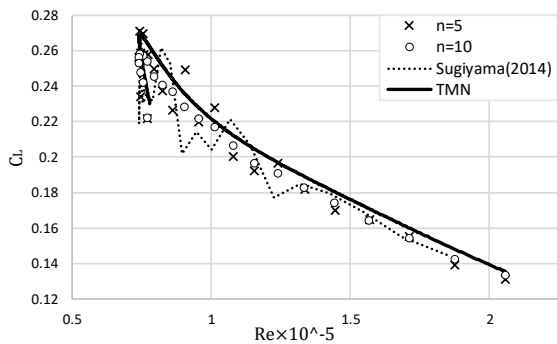


図2 揚力係数の推定結果

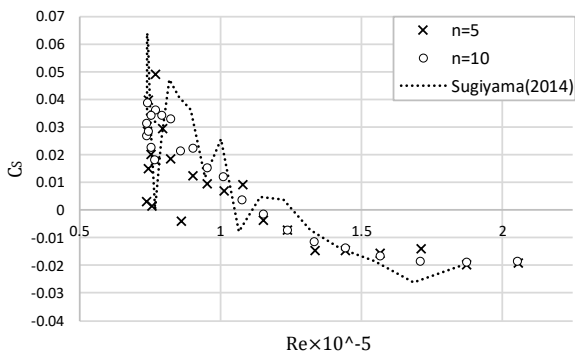


図3 横力係数の推定結果

図中の×と○が本研究で得られた結果を示しており、×が $n=5$ 、○が $n=10$ の推定結果である。点線は先行研究で得られた結果で補間間隔は $n=5$ である。実線はTMNが算出した結果を示している。ただし、TMNでは横力係数は出力されない。横軸には進行速度の瞬間値に基づいたレイノルズ数 Re を用いる。

本研究で得られた抵抗係数と揚力係数は先行研究で得られた結果よりもTMNで算出された値に近くなった。また、先行研究で得られた結果よりも本研究の推定結果では値のばらつきが改善されている。すべての推定値が変化していることから、空力係数が一定値ではないことが確認できる。このことから、物体の加減速が空力係数に影響を及ぼすことが示唆される。

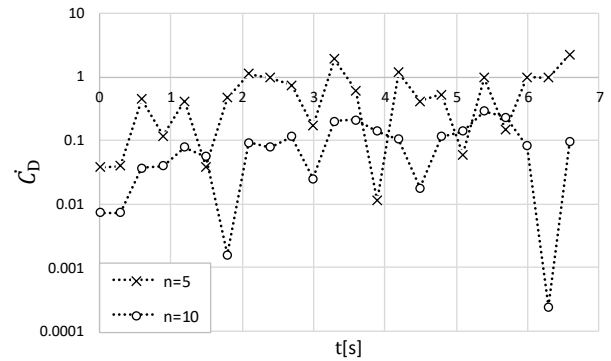


図4 C_D の時間変化

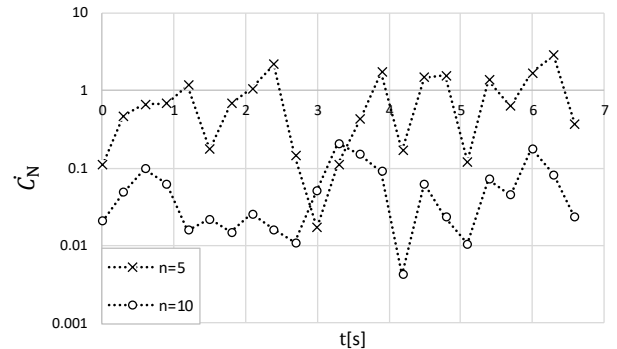


図5 C_N の時間変化

次に空力係数の時間微分の推定結果を図4と図5に示す。このとき、推定値の変化に着目するため縦軸は対数目盛をとっている。上記の結果において、補間間隔が小さい場合に推定した値にばらつきが生じたが、補間間隔を大きくすることによりばらつきは改善された。 $n=10$ の推定結果では、 C_D の時間変化の推定値は $2.4 \times 10^{-4} \sim 2.9 \times 10^{-1}$ 、 C_N の時間変化の推定値は $4.1 \times 10^{-3} \sim 2.1 \times 10^{-1}$ の範囲となっている。

5 まとめと今後の課題

本研究では放物体の軌道形状に基づき、その位置データから軌道の幾何学量、放物体の空力係数および空力係数の時間微分を推定することを試みた。

実際に計測されたゴルフボールの3次元軌道から各係数の推定を行った。本研究で得られた結果は先行研究よりも値のばらつきが改善された。また、放物体の位置データから軌道の幾何学量を用いて空力係数の時間微分を推定することができた。その結果、空力係数の時間微分は $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0$ の範囲で値をとることがわかった。

今後の課題としては軌道データから放物体の回転軸を求めることで、より詳細に放物体に働く流体力の非定常性を検討することが可能になると考えられる。

参考文献

- [1] Cohen C, Darbois-Textier B, Dupeux G, Brunel E and Clanet C : The aerodynamic wall, Proc . R. Soc . A : Vol . 470, (2014), 20130497
- [2] 杉山剛史：ボール軌道の局所的特徴量を用いた空力係数の推定, 茨城大学知能システム工学科修士論文, (2014)
- [3] 本間龍雄, 岡部恒治：微分幾何とトポロジー入門, 3章, 新曜社, (1983)