

軌道の位置情報を用いたボールの空力係数の推定法

Estimation for Aerodynamic Coefficients of a Ball Using Position Data of Trajectory

発表者: 西 俊平

指導教員: 坪井 一洋

1. はじめに

ボールの投射軌道は空力係数によって特徴づけられる。空力係数を求めるために広く用いられている方法に風洞実験がある。しかし風洞実験では、ボールの軸を固定し回転させる装置の取り付けや、実験空間の閉塞などの理由から、実際に飛翔しているボールとは条件に違いが生じる。

本研究では、ボールの投射軌道から読み取った位置データを用いて、飛翔中のボールに働く空力係数を推定する方法を検討する。そのために、ゴルフボールの空力モデルを元に推定法の精度を検証した。さらに、実測から得られたバスケットボールの投射軌道から空力係数の推定値を求めることを試みた。

2. 推定法の原理

(x, y) をボールの重心の位置ベクトル, (u, v) を速度ベクトルとして $q^2 = u^2 + v^2$ とする。また, m および g はボールの質量と重力加速度, d はボールの直径である。

ここで、投射体の位置データを用いて軌道の一部分を補間することを考える。そのために、位置座標 (x, y) を時間の 2 次関数として表すことにする。このとき、時刻 $t = t_1, t_2, t_3$ での軌道上の 3 点の座標を通る 2 次関数の座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とする。ただし, $x_1 < x_2 < x_3$ とする。時刻 t における位置座標をそれぞれ 2 次関数で補間すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^2 + b_x t + c_x \\ y(t) &= a_y t^2 + b_y t + c_y \end{aligned}$$

このとき $x(t)$ と $y(t)$ の各係数は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} a_f &= \frac{1}{\Delta^+ t + \Delta^- t} \left(\frac{\Delta^+ f}{\Delta^- t} - \frac{\Delta^- f}{\Delta^+ t} \right) \\ b_f &= \frac{1}{\Delta^+ t + \Delta^- t} \left\{ (t_3 + t_2) \frac{\Delta^- f}{\Delta^+ t} - (t_2 + t_1) \frac{\Delta^+ f}{\Delta^- t} \right\} \end{aligned}$$

ここで $t = t_2$ での x または y の値を f として $\Delta^+ f = f_3 - f_2$, $\Delta^- f = f_2 - f_1$, $\Delta^+ t = t_3 - t_2$, $\Delta^- t = t_2 - t_1$ である。

これより $t = t_2$ のときの u と v は以下のように表される。

$$\begin{aligned} u &= 2a_x t_2 + b_x = \frac{1}{\Delta^+ t + \Delta^- t} \left(\Delta^+ t \frac{\Delta^- x}{\Delta^- t} + \Delta^- t \frac{\Delta^+ x}{\Delta^+ t} \right) \\ v &= 2a_y t_2 + b_y = \frac{1}{\Delta^+ t + \Delta^- t} \left(\Delta^+ t \frac{\Delta^- y}{\Delta^- t} + \Delta^- t \frac{\Delta^+ y}{\Delta^+ t} \right) \end{aligned}$$

このとき、揚力と抵抗の比例定数 l と k は以下のように表せる。

$$l = -\frac{m}{q^3} \{2a_x v - u(2a_y + g)\} \quad (1)$$

$$k = -\frac{m}{q^3} \{2a_x u + v(2a_y + g)\} \quad (2)$$

以下に推定法の手順をまとめる^[1]。

手順 1: 時間間隔 Δt で軌道上の 3 点の座標を求める。す

$$\text{なわち } t_1 = t_2 - \Delta t, \quad t_3 = t_2 + \Delta t$$

手順 2: 軌道上の 3 点の座標と時刻 t_1, t_2, t_3 から、軌道の補間を用いて $x(t), y(t)$ の各係数を求める。

手順 3: 補間式 $x(t), y(t)$ を用いて時刻 t_2 における u, v と q を求める。

手順 4: 手順 2 と手順 3 で求めた値を (1) 式と (2) 式に代入し, k と l の値を求める。

手順 5: 求めた k と l の値を次式に代入して抵抗係数 C_D と揚力係数 C_L を求める。

$$k = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_D, \quad l = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_L$$

3. 推定法の検証

風洞実験によって求められたゴルフボールの C_D と C_L , 回転減衰 SRD のモデルを以下に示す^[2]。

$$\begin{aligned} C_D &= C_{d1} + C_{d2} W + C_{d3} \sin\{\pi(Re - A_1)/A_2\}, \\ C_L &= C_{l1} W^{0.4}, \quad SRD = R_1 W. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで W はスピンレート, Re はレイノルズ数であり, それぞれ $W = \pi N d / q$, $Re = q d / \nu$ で定義される。ここで ν は動粘性係数とする。また, C_{d1} , C_{d2} , C_{d3} , C_{l1} , A_1 , A_2 , R_1 は定数であり, それぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} C_{d1} &= 0.24, \quad C_{d2} = 0.18, \quad C_{d3} = 0.06, \quad C_{l1} = 0.54, \\ A_1 &= 9.0 \times 10^4, \quad A_2 = 2.0 \times 10^5, \quad R_1 = 0.2 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

上記のモデルをもとに初速度 70 m/s, 初速角 15°, 回転数 40 rps で投射されたゴルフボールの軌道を求めた。その結果を図 1 に示す。

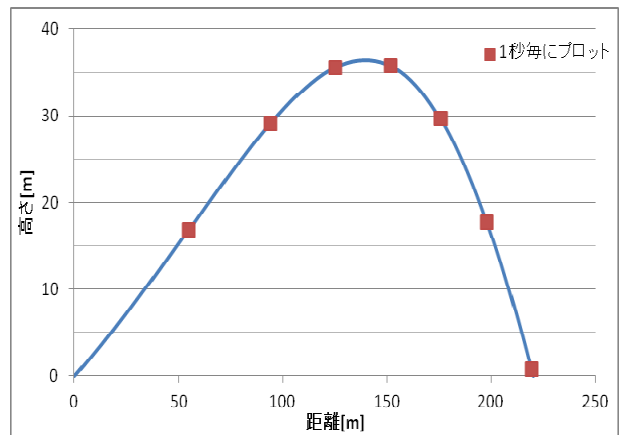


図 1. ゴルフボールの軌道

この軌道データを用いて空力係数を推定した。推定精度の検証のため、時間間隔 Δt を0.1秒、0.5秒、1.0秒と変えて推定を行った。そのときの C_D 、 C_L の推定結果を図2に示す。この図から、 Δt を0.1秒以下にすることで、空力係数の正確な推定が可能となることが分かる。

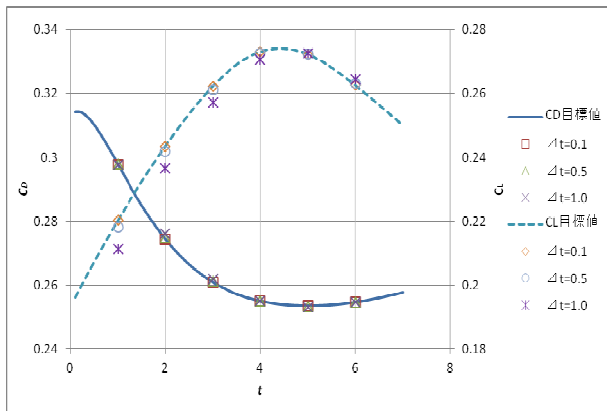


図2. C_D と C_L の推定結果

4. 実測データを用いた空力係数の推定

バスケットボールを投射する様子をビデオカメラで撮影し、画像解析ソフトで読み取ることによって飛行中のボールの軌道データを求めた。読み取った軌道データ1~3を図3に、軌道データ4~6を図4に示す。なお、実測時のボールにはすべて進行方向に対して順回転がかかっており、軌道データ1~3ではその回転数は非常に小さく、軌道データ4~6では比較的強い回転がかかっていた。

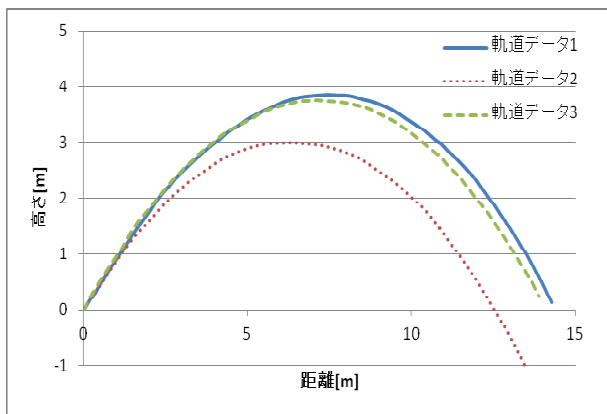


図3. 実測から求めた軌道データ1~3

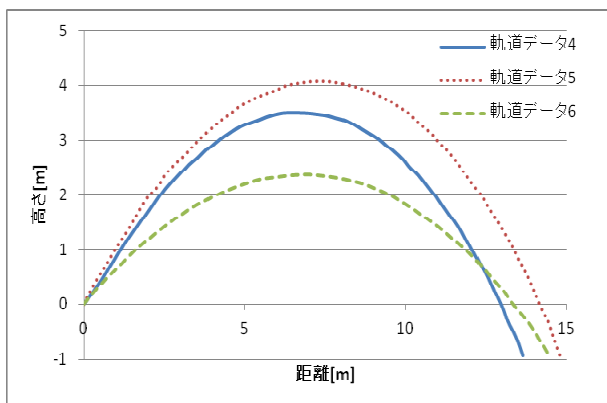


図4. 実測から求めた軌道データ4~6

図3と図4から0.5秒間隔で空力係数の推定を行った。各時刻における C_D と C_L 推定結果の平均値を表1と表2に示す。

表1. 軌道データ1~3の空力係数の推定結果

軌道データ	C_D	C_L
1	0.328123	0.001476
2	0.139815	-0.0125
3	0.145998	0.041015

表2. 軌道データ4~6の空力係数の推定結果

軌道データ	C_D	C_L
4	0.268947	-0.22368
5	0.271599	-0.22873
6	0.185429	-0.27212

バスケットボールの抵抗係数は0.18~0.25程度とされている[3][4]。軌道データ4~6の結果はその値に非常に近くなったが、軌道データ1~3の結果では C_D の値にばらつきが見られる。これはボールの位置データを読み取る際に生じた誤差に起因していると考えられる。また、回転の少ないボールの軌道データ1~3では揚力係数の値は0に近くなり、より強い回転の軌道データ4~6では負の値となった。これらの結果から、回転の影響が C_L の値に反映されていることが分かる。

5. まとめ

本研究ではボールの投射軌道からボールの空力係数を求める方法を検討した。そのためにゴルフボールの空力モデルを用いて推定精度を検証し、推定法の妥当性を確かめた。また、実測データに推定法を適用してバスケットボールの空力係数を推定した。その結果、適切な推定値を得ることが出来た。この方法によって、実条件のもとで飛行中のボールの空力係数の推定が可能となった。今後は軌道を読み取る際の誤差の補正や推定精度の向上が課題である。

参考文献

- [1] 桑原宙大：軌道形状を用いたボールの空気力係数の推定法，茨城大学知能システム工学科卒業論文(2012)
- [2] A. J. Smits：A new aerodynamic model of a golf ball in flight, Science and golf II, (1994), pp. 341-347.
- [3] N. de Mestre：The Mathematics of Projectiles in Sport, NY：Cambridge University Press, pp.137 (1990)
- [4] F. J. Joseph：The Physics of Basketball (2006)