

自由落下する球の軌道による抵抗推定と誤差解析

Error analysis in drag estimation with trajectories of a free falling sphere

発表者：大森 祐弥

指導教員：坪井 一洋

1 はじめに

スポーツで使用されるボールの流体力は一般に風洞実験により測定されている。風洞実験では固定されたボールに定常流を送ることにより流体力を測定している。しかし、実際にはボールは加減速しながら飛んでおり、周りの気流は非定常となるため風洞実験とは条件が異なる。

最近では、風洞実験とは異なる方法で、空力係数の非定常性を推定することが可能となっており、軌道が正確に測定されない場合や測定時間間隔が短い場合には抵抗係数の推定結果にばらつきが生じる問題があった^[1]。

そこで本研究では、自由落下する球の抵抗係数推定法の精度を検討し、実測データの誤差を評価した。軌道から速度および加速度を求める際に生じる差分近似による打ち切り誤差と測定誤差を考慮することで、抵抗係数の誤差評価を行う。

2 自由落下する球の運動方程式

ニュートンの抵抗法則の条件下での自由落下する球の運動方程式は(1)式となる。ただし、鉛直下向きを正とする。

$$m\dot{w} = mg \left(1 - \frac{w^2}{w_\infty^2}\right) \quad (1)$$

ここで、 m は球の質量、 w は球の速度、 g は重力加速度、 w_∞ は終端速度である^[2]。また、終端速度 w_∞ は(2)式で定義される。

$$w_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{C_D \rho S}} \quad (2)$$

このとき、 C_D は抵抗係数、 ρ は空気の密度、 S は球の断面積である^[3]。(1)式を変数分離を用いて積分することで落下距離 z は(3)式と求まる。

$$z = \frac{w_\infty^2}{g} \log \left(\cosh \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \right) \quad (3)$$

(3)式を微分することにより速度 w は(4)式、加速度 \dot{w} は(5)式、躍度および z の4階微分はそれぞれ(6)式と(7)式となる。

$$w = w_\infty \tanh \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \quad (4)$$

$$\dot{w} = g \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \quad (5)$$

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = -2 \frac{g^2}{w_\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \tanh \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \quad (6)$$

$$\frac{d^4 z}{dt^4} = 2 \frac{g^3}{w_\infty^2} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \left\{ 2 \sinh^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) - 1 \right\} \quad (7)$$

3 抵抗係数の推定法

(1)式と(2)式より抵抗係数 C_D は(8)式のように求めることができる。

$$C_D = \frac{2m}{\rho S} \frac{1}{w^2} (g - \dot{w}) \quad (8)$$

抵抗係数 C_D は(8)式に速度および加速度を代入することで求まる。

速度および加速度は軌道を部分的に補間することで求まる。ここでは、軌道を時間の2次関数として表し、速度および加速度を求める。

4 誤差解析

位置座標の測定時間間隔を τ 、補間間隔を n と表わす。このとき、補間区間の中央点 z_0 と中央点から $n\tau$ 前後の点 z_- および z_+ の3点による補間を考える^[1]。

本研究では3点の軌道データから速度および加速度を求める際に差分近似を用いる。そのため、軌道データから得られた速度および加速度には打ち切り誤差が生じる。

また、位置データは必ずしも正確に測定できるとは限らない。そのため、位置データの中央点 z_0 に測定誤差 $|\delta z|$ が含まれているとする。

打ち切り誤差および測定誤差を考慮したときの速度 w_Δ と加速度 \dot{w}_Δ はそれぞれ(9)式と(10)式となる。

$$w_\Delta = \frac{z_+ - z_-}{2n\tau} = w + \frac{1}{6} \frac{d^3 z}{dt^3} (n\tau)^2 + O((n\tau)^4) \quad (9)$$

$$\dot{w}_\Delta = \frac{z_+ - 2z_0 + z_-}{(n\tau)^2} - \frac{2}{(n\tau)^2} |\delta z| \quad (10)$$

$$= \dot{w} + \frac{1}{12} \frac{d^4 z}{dt^4} (n\tau)^2 + O((n\tau)^4) - \frac{2}{(n\tau)^2} |\delta z|$$

速度および加速度の誤差を考慮した抵抗係数を $C_{D\Delta}$ とすると、それは(8)式に $w = w_\Delta$ 、 $\dot{w} = \dot{w}_\Delta$ を代入することで求まる。その結果を(11)式に示す。

$$C_{D\Delta} = C_D + \frac{2m}{\rho S w^2} \left\{ 2|\delta z| \left(\frac{1}{(n\tau)^2} - \frac{1}{3w} \frac{d^3 z}{dt^3} \right) - \left(\frac{1}{12} \frac{d^4 z}{dt^4} + \frac{1}{3w} \frac{d^3 z}{dt^3} (g - \dot{w}) \right) (n\tau)^2 + O((n\tau)^4) \right\} \quad (11)$$

このとき、右辺第2項が抵抗係数の誤差 δC_D である。

(4)式～(7)式を代入することで抵抗係数の相対誤差 $\delta C_D/C_D$ は(12)式となる。

$$\frac{\delta C_D}{C_D} = \frac{1}{g} \coth^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \left\{ 2|\delta z| \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{2}{3} \frac{g^2}{w_\infty^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \right) + \frac{1}{6} \frac{g^3}{w_\infty^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \left(2 - \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \right) (n\tau)^2 \right\} \quad (12)$$

(12)式右辺を $n\tau$ の関数とみなしたとき、右辺を最小とする $n\tau$ は(13)式で与えられる。

$$(n\tau)^4 = \frac{12w_\infty^2 |\delta z|}{g^3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \left(2 - \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \right)} \quad (13)$$

(12)式右辺が最小となるときの $n\tau$ を代入すると、 $\delta C_D/C_D$ の最小値が求まり、それは(14)式となる。

$$\frac{\delta C_D}{C_D} = \frac{\sqrt{g}}{6w_\infty} \operatorname{sech} \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \coth^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \left\{ \sqrt{2 - \operatorname{sech}^2 \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \left(2\sqrt{3|\delta z|} + 1 \right)} + \frac{8|\delta z|\sqrt{g}}{w_\infty^2} \operatorname{sech} \left(\frac{g}{w_\infty} t \right) \right\} \quad (14)$$

(12)式において $0 < \operatorname{sech}(gt/w_\infty) \leq 1$, $\coth^2(gt/w_\infty) \approx 1 + 4e^{-2gt/w_\infty}$ [4]より誤差評価式 $|\delta C_D|/C_D$ は(15)式となり、その右辺は(16)式のとき極値をとる。

$$\frac{|\delta C_D|}{C_D} \leq \frac{1}{g} \left(1 + 4e^{-2\frac{g}{w_\infty}t} \right) \left\{ 2|\delta z| \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{2}{3} \frac{g^2}{w_\infty^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{g^3}{w_\infty^2} (n\tau)^2 \right\} \quad (15)$$

$$(n\tau)^4 = \frac{6w_\infty^2}{g^3} |\delta z| \quad (16)$$

(13)式と(16)式より $n\tau$ に関する以下の条件が得られ、 $n\tau$ が最小値をもつことがわかる。

$$(n\tau)^4 \geq \frac{6w_\infty^2}{g^3} |\delta z| \quad (17)$$

5 誤差評価

今回、バレーボールを自由落下させたときの実験データを使用した。このとき、相対誤差の式である(14)式に測定誤差 $|\delta z| = 0.007$ mを代入し、相対誤差の時間変化を求めた。実験データから抵抗係数を求めたときのフレーム数は240 fps、補間間隔 n は30であったことから、補間間隔 $n\tau = 30/240 = 0.125$ sとし[5]、誤差評価を行った。また、最適な $n\tau$ のときも同様に評価し、その結果は図1となった。

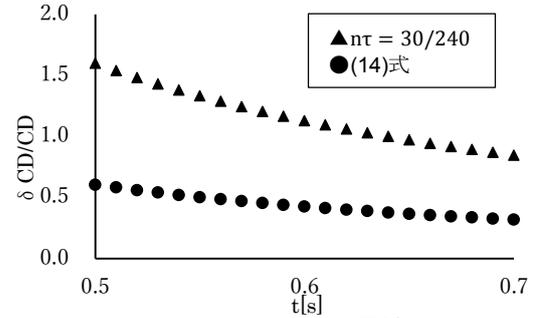


図1 $\delta C_D/C_D$ の評価結果
($|\delta z| = 0.007$ m, $w_\infty = 20$ m/s)

(8)式と(13)式より最適な補間間隔 $n\tau$ で抵抗係数を評価した結果が図2となる。一般的なボールの抵抗係数は大きくても0.45程度より[6]、実測データから抵抗係数を求めるときに使用した補間間隔 $n\tau$ は最適ではないと考えられる。

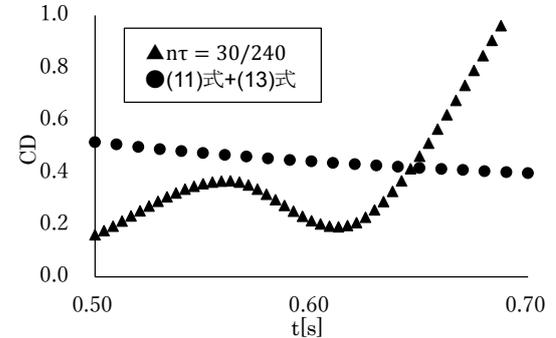


図2 C_D の評価結果
($|\delta z| = 0.007$ m, $w_\infty = 20$ m/s, $\rho = 1.205$ kg/m³, $s = 0.0373$ m², $m = 0.275$ kg)

6 まとめ

本研究では、軌道を用いた抵抗係数推定法の精度を検証するために測定誤差および差分近似による打ち切り誤差を考慮した抵抗係数の誤差評価を行った。

自由落下する球の条件下で抵抗係数の誤差評価を行った結果、相対誤差に極値が存在し、それが最小値となることを示した。

具体例を用いて、最適な補間間隔を使用することで、相対誤差を小さくできることを示した。

また、実測データから抵抗係数を求めるときに、最適ではない補間間隔を用いると、抵抗係数が不自然な増加をみせたのに対し、最適な補間間隔では適切な値を示した。

参考文献

- [1] K. Tsuboi and K. Yasuda: "Aerodynamic Coefficients Estimation based on Local Geometry of Ball Trajectory" Proceeding of IACSS 2014 Darwin Conference, 2014.
- [2] C. Cohen et al.: "The aerodynamic wall" Proc. R. Soc. A470:20130497, 2013.
- [3] Neville de Mestre: "The Mathematics of Projectiles in Sport", (Cambridge University Press, 1990) pp. 39-41.
- [4] 森口、宇田川、一松: 『岩波数学公式II 級数・フーリエ解析』, (岩波書店, 1957) p.205.
- [5] 梶山佑樹: 2種類のバレーボールの飛翔時における空力係数比較, 茨城大学工学部知能システム工学科卒業論文, 2017
- [6] 浅井武, 瀬尾和哉, 小林修, サッカーボールの空力特性に関する研究, 体育学研究, VOL52, No.1, 2007