

# 最適化手法を用いた非圧縮性流れの計算法 - 定常流れ問題への応用 -

## Computational method of incompressible flow with optimization technique

### -Application to steady flow problems -

発表者 笹島 健司

指導教員 坪井 一洋

The purpose of the present paper is to propose a new computational method for incompressible flow. Since incompressible Navier-Stokes equation in rotational form formally corresponds to state equation of linear system theory, we are able to introduce optimization technique to the computational method. In 2-D cavity flow problem the effect of computational grids is investigated in low degree of freedom and some numerical solutions are obtained in high degree of freedom.

### 1. はじめに

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値計算では、その非線形性のために非圧縮の条件を満たす解を求めることは容易ではない。回転型で表されたナビエ・ストークス方程式が形式的に線形システムの状態方程式の形に書くことに着目して、非圧縮性流れの計算を最適化手法によって定式化することが可能である<sup>[1]</sup>。

本研究では、この定式化を具体的な流れ問題に応用する。簡単のため2次元の定常な cavity 流れを考えた。3つの異なる格子系を用いた少数自由度の系に対して状態方程式を導き、摂動によって定常解を求めた。さらに、多自由度の解を求めるために、最適化手法を数値的に行うプログラムを作成し、cavity 流れの数値解を得た。

### 2. 状態方程式と計算格子

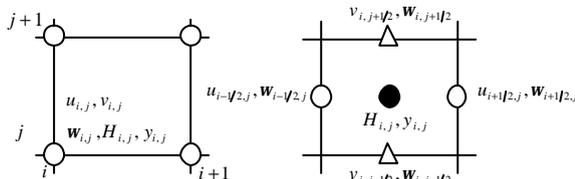
非圧縮性ナビエ・ストークス方程式系に対する差分近似により、状態方程式と出力方程式が得られる(詳細は文献[1]参照)。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}\mathbf{H}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_0(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{X}(t) \quad (2)$$

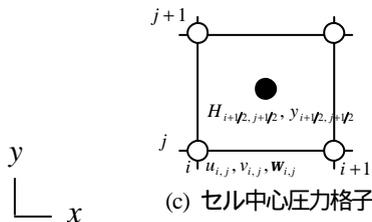
ここで、 $\mathbf{X}(t)$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $\mathbf{Y}(t)$  は  $c$  次元出力ベクトル、 $\mathbf{H}(t)$  は  $m$  次元制御ベクトル、 $\mathbf{A}$  は  $(n \times n)$  次元システム行列、 $\mathbf{G}$  は  $(n \times m)$  次元制御行列、 $\mathbf{D}$  は  $(c \times n)$  次元出力行列である。また、 $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{u}_0(t)$  はそれぞれ境界条件から得られる行列、ベクトルである。

上記の式(1)と式(2)に現れる状態ベクトルや各行列は、具体的な問題や使用する格子系によって異なる。ここでは、今回提案された計算法を検証するために、2次元の定常な cavity 流れを考える。この問題では、1辺の長さが1の正方形領域を考え、その内部に流体が満たされているとする。上辺を右方向に一定の流速  $u_0$  だけ移動させると、内部の流体は引きずられて運動を始める<sup>[2]</sup>。



(a) レギュラー格子

(b) スタガード格子



(c) セル中心圧力格子

Fig. 1 計算格子

また、用いる格子系の影響を調べるために、流れの方程式系の離散化に Fig. 1 の(a)~(c)に示す3つの異なる格子系を用いた。同図(a)は全ての物理量を同一の格子点上で定義する(レギュラー格子)。同図(b)は個々の物理量の定義点が全て異なる(スタガード格子)。また、同図(c)では流速はレギュラー格子の配置をとり、圧力がセル中心で定義される(セル中心圧力格子)<sup>[3]</sup>。

### 3. 少数自由度の解

2次元 cavity 流れにおいては最小の自由度として、レギュラー格子とセル中心圧力格子では  $n=8$ 、スタガード格子では  $n=4$  である。ここでは、これらの自由度に対して具体的な状態ベクトルやシステム行列を示す。また、これらから得られた摂動解のうち、最も簡単なストークス解 ( $Re=0$ )  $\mathbf{X}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$  のみについてまとめる。ただし、以下において、 $l$  は格子幅、 $Re$  はレイノルズ数、 $w_1 \sim w_4$  は渦度を表す。

#### (a) レギュラー格子に対する各行列とストークス解

$$\mathbf{X} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T \quad \mathbf{H} = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4]^T$$

$$\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{l^2} & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & 0 & Rew_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l^2} & -\frac{4}{l^2} & 0 & \frac{1}{l^2} & 0 & Rew_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{4}{l^2} & \frac{1}{l^2} & 0 & 0 & Rew_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{4}{l^2} & 0 & 0 & 0 & Rew_4 \\ -Rew_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{l^2} & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & 0 \\ 0 & -Rew_2 & 0 & 0 & \frac{1}{l^2} & -\frac{4}{l^2} & 0 & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & -Rew_3 & 0 & \frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{4}{l^2} & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & -Rew_4 & 0 & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{4}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2l} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 1/l^2 \ 1/l^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{H}_0 = [-u_0/l \ -u_0/2l \ -3u_0/2l \ 0]^T$$

$$\mathbf{X}_0 = [-u_0/16 \ -u_0/16 \ u_0/16 \ u_0/16 \ u_0/16 \ -u_0/16 \ u_0/16 \ -u_0/16]^T$$

#### (b) スタガード格子に対する各行列とストークス解

$$\mathbf{X} = [u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2]^T \quad \mathbf{H} = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4]^T \quad \mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{l^2} & \frac{1}{l^2} & \frac{Rew_1}{4} & \frac{Rew_1}{4} \\ \frac{1}{l^2} & -\frac{5}{l^2} & \frac{Rew_2}{4} & \frac{Rew_2}{4} \\ \frac{Rew_3}{4} & \frac{Rew_3}{4} & -\frac{5}{l^2} & \frac{1}{l^2} \\ -\frac{Rew_4}{4} & -\frac{Rew_4}{4} & \frac{1}{l^2} & -\frac{5}{l^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^T$$

$$\mathbf{B} = [0 \quad 2/l^2 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{H}_0 = [-u_0/l \quad -u_0/2l \quad -3u_0/2l \quad 0]^T$$

$$\mathbf{X}_0 = [-u_0/12 \quad u_0/12 \quad u_0/12 \quad -u_0/12]^T$$

(c) セル中心圧力格子に対する各行列とストークス解

この場合  $\mathbf{X}$  ,  $\mathbf{A}$  ,  $\mathbf{B}$  はレギュラー格子と同じになる .

$$\mathbf{H} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4 \quad H_5 \quad H_6 \quad H_7 \quad H_8 \quad H_9]^T$$

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7 \quad y_8 \quad y_9]^T$$

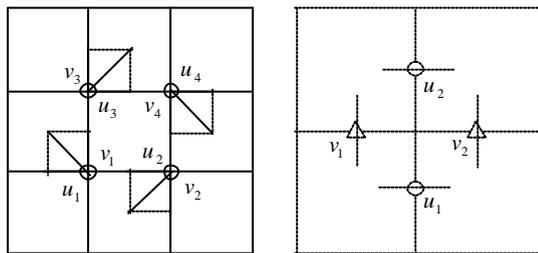
$$\mathbf{G} = \frac{1}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^T$$

$$\mathbf{H}_0 = [-u_0/l \quad 0 \quad -u_0/l \quad -u_0/2l \quad -u_0/l \quad u_0/2l \quad -2u_0/l \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{X}_0 = [-u_0/16 \quad -u_0/16 \quad u_0/16 \quad u_0/16 \quad u_0/16 \quad -u_0/16 \quad u_0/16 \quad -u_0/16 \quad -u_0/16]^T$$

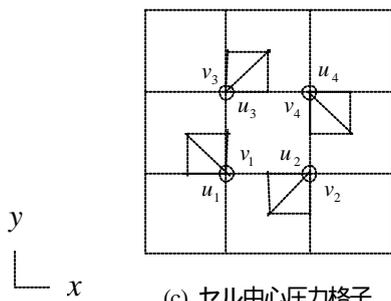
これらの結果からわかるように , スタガード格子とセル中心圧力格子において  $\mathbf{G} = \mathbf{D}^T$  の関係があるが , レギュラー格子ではこのような特別な関係はみられない .

今回 , それぞれの格子系で得られたストークス解から流速ベクトルを図示した結果を Fig. 2 に示す . いずれの格子においても流れ場が全体として時計回りに回転しており , 2 次元 cavity 流れの特徴が再現されている . なお , レギュラー格子とセル中心圧力格子に対する流速は完全に一致している .



(a) レギュラー格子

(b) スタガード格子



(c) セル中心圧力格子

Fig. 2 少数自由度の計算結果

#### 4. 数値計算による多自由度の解

2 次元 cavity 内部の詳細な流れ場を確認するためには自由度を上げる必要がある . しかし , その場合 , 数式処理による行列計算は困難となる . そこで , 本計算法のアルゴリズムにしたがった数値計算プログラムを作成し , 多自由度における解を数値的に求めた .

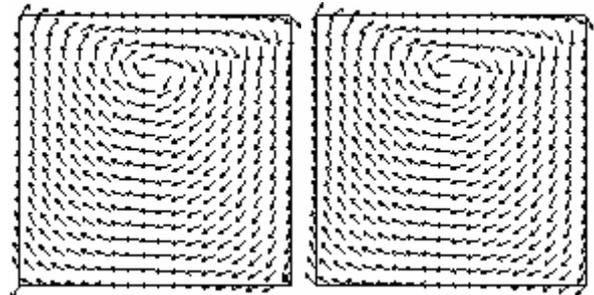
まず , 作成した数値計算プログラムを検証するために , 前節で扱った少数自由度 ( $n=4,8$ ) の数値解を求め , 解析解と比較した . ここでは , レギュラー格子に対する結果を Table 1 に示す . 流速と全圧ともに両者の一致は良好である .

Table 1 解析解と数値解の計算結果

解析解			数値解		
H	u	v	H	u	v
-3.0	-0.0625	0.0625	-3.000e+00	-6.250e-02	6.250e-02
-1.5	-0.0625	-0.0625	-1.500e+00	-6.250e-02	-6.250e-02
-4.5	0.0625	0.0625	-4.500e+00	6.250e-02	6.250e-02
0	0.0625	-0.0625	1.076e-16	6.250e-02	-6.250e-02

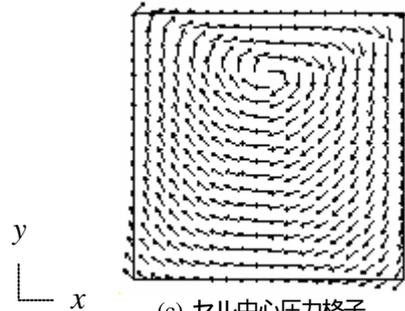
なお , スタガード格子とセル中心圧力格子に対する結果についても解析解と比較をしたところ , 遜色のない結果が得られた .

次に , レギュラー格子とセル中心圧力格子に対して  $n=722$  , スタガード格子に対して  $n=760$  の計算を行った . これは , 各格子系に対して  $20 \times 20$  に分割 (格子幅 0.05) したことを意味する . また ,  $u_0=1$  とした . 得られた流速ベクトルを Fig. 3 に示す . いずれの格子系に対してもほぼ同じ結果が得られた .



(a) レギュラー格子

(b) スタガード格子



(c) セル中心圧力格子

Fig. 3 多自由度の計算結果

#### 5. まとめと今後の課題

最適化手法に基づいた非圧縮性流れの計算法を 2 次元 cavity 流れ問題に適用した . 特に , 3 つの異なる格子系を用いて離散化し , システム行列や制御行列を具体的に示した . また , 摂動により定常解を求めた .

今回提案した計算法により , 多自由度での解を得るために , 数値計算プログラムを作成した . 少数自由度の数値解を求め , 解析解と比較することでプログラムの検証を行った . さらに , 3 つの格子系に対して  $n=700$  程度の自由度をもつ数値解を求めた .

今後は , 計算法を他の定常問題に適用することや , 非定常問題に拡張する予定である .

#### 参考文献

- [1] 佐藤陽介 : 『最適化手法を用いた非圧縮性流れの計算法 一般論と定式化』 , 平成 17 年度茨城大学工学部システム工学科卒業研究 , (2006)
- [2] 河村哲也 : 『流体解析』 , 朝倉書店 , (1996)
- [3] 田名網七音 : 『Bathtub vortex シミュレーションの高精度化』 , 平成 17 年度茨城大学工学部システム工学科卒業研究 , (2006)