最適化手法を用いた非圧縮性流れの計算法－一般論と定式化－

Computational method of Incompressible flow with Optimization technique
-General theory and the formulation-

発表者：佐藤 陽介　　　　**指導教員：坪井 一洋**

The purpose of the present paper is to propose a new computational method for incompressible flow. Since incompressible Navier-Stokes equation in rotational form formally corresponds to state equation of linear system theory, we are able to introduce optimization technique to the computational method. The general theory and the formulation are presented and some steady solutions of 2-D cavity flow are shown.

1. はじめに

非圧縮性流れの基礎方程式は，非圧縮性ナビエ・ストークス方程式（以下，NS 方程式と記述する）と連続の式で表される．非圧縮性流れを求めるには，この 2 つの式を連立させて解く必要がある．しかし，非圧縮性 NS 方程式は非線形の偏微分方程式であるため，解を求めるのが一般に困難である．

いま，非圧縮性 NS 方程式に渦度を考慮して回転型の式に変形すると，線形システムの状態方程式と形式的に一致し，連続の式を線形システムの出力方程式とみなすと，非圧縮性流れの基礎方程式系を近似的に線形システムとみなすことができる．

本研究では，最適化手法[1]を用いて非圧縮性流れの基礎方程式を解くことを試みる．そして，非圧縮性流れの新しい計算法の一般論を提案する．

2. 流れの基礎方程式と線形システム

2.1 非圧縮性流れの基礎方程式

非圧縮性流れの基礎方程式である非圧縮性 NS 方程式と連続の式は，それぞれ以下の式で表される[2].

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathrm{Re}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla P + \Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{u}$ は流速ベクトル，P は圧力，Re はレイノルズ数という無次元数を表す．いま，簡単のため 2 次元流れを考えると，流速ベクトル $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u} = (u, v)$ で表される．このとき，次式に示す渦度 w

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

を考慮すると，式(1)を回転型の NS 方程式で表すことができる．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left(-\mathrm{Re}\,\mathbf{O} + \Delta\right)\mathbf{u} - \nabla H \tag{3}$$

ただし，$\mathbf{O}$ は渦度 w を含む行列，H は全圧でそれぞれ以下のように定義される[3].

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H = P + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(u^2 + v^2)$$

2.2 線形システム[4]

n 次元の入出力線形システムを表す方程式は，一般に以下の 2 つの方程式で構成される．すなわち，式(4)が状態方程式，式(5)が出力方程式である．

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{GH}(t) \tag{4}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{DX}(t) \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{X}(t)$ は n 次元状態ベクトル，$\mathbf{Y}(t)$ は c 次元出力ベクトル，$\mathbf{H}(t)$ は m 次元制御ベクトル，$\mathbf{A}$ は $(n\times n)$ 次元システム行列，$\mathbf{G}$ は $(n\times m)$ 次元制御行列，$\mathbf{D}$ は $(c\times n)$ 次元出力行列である．

式(4)の解は定数変化法により，一般に次式で与えられる．

$\mathbf{H}(t)=0$ のとき，$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$

$\mathbf{H}(t)\neq 0$ のとき，

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{GH}(t)\,dt \tag{6}$$

ただし，$\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(0)$ で，$e^{\mathbf{A}t}$ は状態推移行列で次式に示すような無限級数の和で定義される．

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t + \cdots + \frac{1}{s!}\mathbf{A}^s t^s + \cdots$$

また，以下に示す可制御行列 $\mathbf{H}_c$ の階数が n であればそのシステムは可制御である．

$$\mathbf{H}_c = [\mathbf{G} \quad \mathbf{AG} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{G}] : (n\times nm)$$

3. 計算法の定式化

具体的な流れの問題が決まると，関連した境界条件も決まる．使用する格子により差分化すると，回転型 NS 方程式(3)は次の形の状態方程式で表される．

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{GH}(t) + \mathbf{Bu}_0(t) \tag{7}$$

ここで，$\mathbf{X}(t)$ と $\mathbf{H}(t)$ はそれぞれ差分化した流速ベクトルと全圧からなる状態ベクトル，制御ベクトルである．$\mathbf{G}$ は勾配の差分化から得られる係数行列，$\mathbf{B}$ と $\mathbf{u}_0(t)$ は境界条件から決まる行列とベクトルである．また，次のようにシステム行列 $\mathbf{A}$ は，$\mathbf{O}$ を差分化した行列 $\mathbf{W}$ とラプラス演算子の係数行列 $\mathbf{L}$ から定義される．

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\,\mathbf{W} + \mathbf{L} \tag{8}$$

式(7)より，形式的な解として次式が求まる．

$$\mathbf{X}^{k+1} = e^{(\mathrm{Re}\mathbf{W}+\mathbf{L})dt}\mathbf{X}^k - \int_t^{t+dt}\left(e^{(\mathrm{Re}\mathbf{W}+\mathbf{L})(t+dt-t)}(\mathbf{GH}(t) + \mathbf{Bu}_0(t))\right)dt \tag{9}$$

式(9)の右辺のうち $\mathbf{H}$ が未定であり，以下に示す最適化の考えに基づいて決定される．

連続の式(2)を差分化して，出力方程式(5)を定義する．ここで， $\mathbf{D}$ は発散の差分表現である．非圧縮性流れでは式(5)の出力 $\mathbf{Y}=0$ となる必要があるので，次の二次形式を最小化することを考える．

$$Z=(\mathbf{Y}^{k+1})^T\mathbf{Y}^{k+1}=(\mathbf{X}^{k+1})^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{X}^{k+1} \tag{10}$$

式(10)より，評価関数 Z は $\mathbf{H}$ の関数となり，最適化手法により Z を最小とする $\mathbf{H}$ を求めることができる．この $\mathbf{H}$ を式(9)に代入することで，時刻 $k+1$ での流速 $\mathbf{X}$ が決まる．この手順を各時間ステップにおいて繰り返すことになる．

4. 定常解の計算例

前節で記した計算法を用いれば，各時間ステップに対応した全圧と流速を計算できる．しかし，非定常計算では手順が複雑になるので，ここでは簡単な定常問題を扱う．以後，時間 t の記述を省略する．

式(7)より，定常な状態ベクトルは次式で得られる．

$$\mathbf{X}=-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{H}+\mathbf{B}\mathbf{u}_0) \tag{11}$$

ここで， $\mathbf{A}$ の逆行列を求めることは一般に困難である．そこで，摂動展開による近似を行う．摂動とはあるモデルが与えられたときの近似解を得るための方法である[5]．例として，$\mathbf{X},\mathbf{H}$ を Re の 0 次と 1 次の項に分ける．ただし，$\mathrm{Re}\ll 1$である．すなわち，

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mathrm{Re}\,\mathbf{X}_1,\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathrm{Re}\,\mathbf{H}_1$$

また， $\mathbf{A}$ は式(8)よりすでに摂動展開となっている．

これらをそれぞれ式(7)に代入し，Re の次数毎に並べた式はそれぞれ以下となる．

$$\mathbf{X}_0=-\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{H}_0+\mathbf{B}\mathbf{u}_0) \tag{12}$$

$$\mathbf{X}_1=-\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{H}_1+\mathbf{W}\mathbf{X}_0) \tag{13}$$

そこで，式(12)の $\mathbf{X}_0$ を二次形式(10)に代入することで，Z を最小とする全圧 $\mathbf{H}_0$ が求まる．この $\mathbf{H}_0$ を式(12)に代入すれば解 $\mathbf{X}_0$ が求まる． $\mathbf{X}_1$ についても，同様の手順を行って求めることが可能となる．

以下では，2 次元正方形 cavity 流れ[2]を考え，提案した計算法を検証する．基礎方程式の離散化には，Fig. 1 に示すような各物理量の定義点が異なるスタガード格子を用いる．

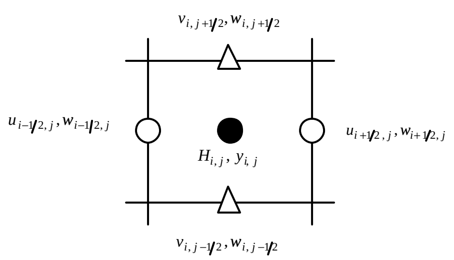

Fig. 1 スタガード格子

この格子を用いて，自由度が $n=4$ と $n=12$ の場合について離散化した．そして，前述した手順にしたがって 0 次の解（ストークス解）と 1 次の摂動解の導出を試みた．なお，行列計算には Mathematica を用いた．

式(7)を求めた際に可制御性の確認を行ったところ，可制御行列の階数は $n-1$ となり，可制御性の条件を満足しなかった．また，得られた制御行列 $\mathbf{G}$ と出力行列 $\mathbf{D}$ は転置の関係になった．

ここでは，$n=12$ の計算結果を示す．ただし，l は格子間隔である．また，ストークス解の流速図を Fig. 2 に示す．

$$\mathbf{H}_0=-\frac{u_0}{5l}\begin{bmatrix}7 & 6 & 5 & 8 & 6 & 4 & 12 & 6 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{X}_0=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-3 & -4 & 7 & -3 & -4 & 7 & 3 & 0 & -3 & 7 & 0 & -7\end{bmatrix}^T$$

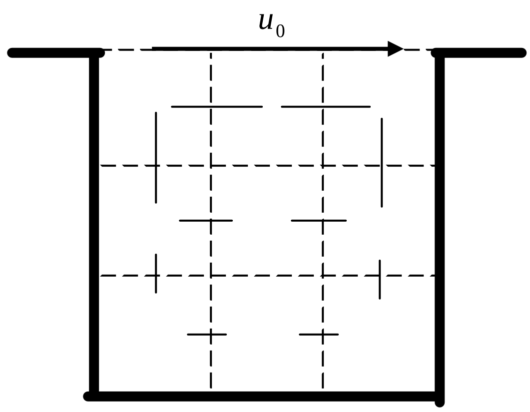

Fig. 2 ストークス解の流速図（ $n=12$）

Fig. 2 を見ると，求めた流速が渦を巻いて流れている．また，各セルで連続の式を満足していることも確認できる．

ストークス解の結果 $\mathbf{X}_0$ から 1 次の摂動解 $\mathbf{X}_1$ の導出も行った．ただし， $n=4$ では 1 次の摂動解は存在しないこともわかった．

5. まとめと今後の課題

回転型NS方程式系を形式的に線形システムと対応させることで，非圧縮の条件を評価関数とする最適化手法に基づく非圧縮性流れの新しい計算法を提案した．また，計算法の検証として 2 次元正方形 cavity 内の定常流れを摂動により求めた．

今後の課題として，他の流れ問題への応用や非定常解の導出などが挙げられる．

参考文献

[1] 奈良宏一，佐藤泰司：システム工学の数理手法，コロナ社，(1996)

[2] 河村哲也：流体解析 I，朝倉書店，(1996)

[3] 湊正信：回転型オイラー方程式を用いた高精度差分スキームの導出，平成 16 年度茨城大学工学部システム工学科卒業研究論文，(2005)

[4] 白石昌武：入門現代制御理論，日刊工業新聞社，(1995)

[5] 摂動論：http://sip.sci.shizuoka.ac.jp/kkouza93/node5.html