

# 軌道データによるボールの空力評価へのベイズ推定の応用

## Application of Bayesian Inference to Estimation of Aerodynamic Coefficients of a Ball with Trajectory Data

発表者：関口 瑞菜 指導教員：坪井 一洋

### 1 はじめに

2020年7月から56年ぶりに東京オリンピックが開催される。そこではサッカーやバレーボールなどの様々なスポーツ競技が行われる。これを機会に、さらにスポーツの競技者人口の増加と経済的価値も高まり、スポーツ技術の研究もさらに進むことが予想できる。

球技ではボールの空力係数とその振る舞いに大きく影響を与えるため、ボールの空力係数を解明することが重要である[1]。実際、ボールの流体力は古くから研究されている。しかし、これらの多くは風洞実験により行われている。風洞実験の場合、ボールを固定するための支えやボールを回転させるための駆動装置が必要となるため、飛翔中のボールの空力を正確に求めることは容易ではない。

そこで、ベイズ推定の手法を用いて軌道データからボールに働く流体力を推定することを考える。そして、複数の軌道データを使って推定で使用するパラメータの影響を調べた。

軌道データから初期速度を求め、抵抗係数と揚力係数に乱数を与えて運動方程式から速度を計算して軌道を求める。そして、軌道データと運動方程式から求めた軌道間の距離を計算し、それが一定値以下のときの抵抗係数と揚力係数をとることで、統計的に空力係数を推定する。

### 2 運動方程式

ボールの投射位置を座標原点にとり、鉛直上向きを $z$ 軸とする。ボールの初速度ベクトルと $z$ 軸が作る平面を考え、この平面内で水平方向に $x$ 軸をとる。以下では、ボールはこの $x$ - $z$ 平面内で2次元運動すると仮定する。

空気中においてボールの速度の自乗に比例する抵抗と揚力が働くとする、このときのボールの運動方程式は次式となる。

$$\dot{u} = -\frac{k}{m}qu - \frac{l}{m}qw \quad (1)$$

$$\dot{w} = -\frac{k}{m}qw + \frac{l}{m}qu - g \quad (2)$$

ここで $(x, z)$ と $(u, w)$ はボールの重心の位置ベクトルと速度ベクトルで $q^2 = u^2 + w^2$ である。また、 $m$ および $g$ はボールの質量と重力加速度である。

(1)式と(2)式の $k$ と $l$ は次式で定義される抵抗と揚力の比例定数である。

$$k = \frac{1}{2}\rho SC_D, l = \frac{1}{2}\rho SC_L \quad (3)$$

ただし、 $\rho$ は空気密度、 $S$ はボールの投影断面積、 $C_D$ と $C_L$ はそれぞれ抵抗係数と揚力係数である。

ここで(1)式の両辺に $u$ 、(2)式の両辺に $w$ をかけて差をとると、抵抗 $k$ について(4)式が導かれる。

$$\frac{k}{m} = -\frac{1}{q^3}(u\dot{u} + w\dot{w} + gw) \quad (4)$$

また(1)の式の両辺に $w$ 、(2)式の両辺に $u$ をかけてまとめると、揚力 $l$ について(5)式の関係式が導かれる。

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{q^3}(u\dot{w} + u\dot{w} - gu) \quad (5)$$

ボールの軌道データからその速度と加速度を求めることができるので、それらを(4)式と(5)式に代入することで抵抗 $k(C_D)$ と揚力 $l(C_L)$ を求めることが可能である。

### 3 ABC法

尤度関数は計算上扱いにくく、コストがかかるため、シミュレーションデータと実測データを比較することで、尤度の計算をなくして事後分布を推定する方法として、近似ベイズ計算法(Approximate Bayesian computation ABC法)[2]がある。

$\theta$ を求めるべきパラメータベクトルとすると、 $f(x|\theta)$ は与えられた $\theta$ に対するデータ $x$ の尤度と呼ばれる。このとき、事後分布 $\pi(\theta|x)$ は尤度 $f(x|\theta)$ と事前分布 $\pi(\theta)$ の積に比例する。よって、ABC法では事前分布 $\pi(\theta)$ を与えると事後分布 $\pi(\theta|x)$ が推定できる。

ABC法の一般的なアルゴリズムを以下に示す。

- 1) 提案分布 $\pi(\theta)$ から候補パラメータ $\theta^*$ をサンプリングする。
- 2)  $x^*$ を条件付確率分布 $f(x|\theta^*)$ からシミュレーションする。
- 3)  $x^*$ を実験データ $x_0$ と比較し、距離関数が $d(x_0, x^*) \leq \epsilon$ であるとき、 $\theta^*$ を得る。ここで $\epsilon$ は距離関数の閾値である。

今回は、ABCアルゴリズムで最も簡単な棄却サンプリングを用いた。棄却サンプリングは上記のABCアルゴリズムと同様の手順である。今回用いた推定法の手順を以下に示す。

- 1) ボールの軌道データから初期位置と初速度を求める。
- 2)  $C_D$ と $C_L$ を乱数で生成する。
- 3) 1)で求めた初期条件を用いて、(1)式と(2)式から速度 $u$ と $w$ を求める。
- 4) 3)で得た速度から位置を求める。
- 5) 軌道データと4)で求めた軌道間の距離を計算する。
- 6) 距離が一定値以下であるときの $C_D$ と $C_L$ をとる。
- 7) 1)~6)を繰り返す。

### 4 結果と考察

図1に今回用いたサッカーボールの軌道データ例を示す[3]。これは、ビデオカメラで撮影したボールの軌道を数値化して得られた結果である。

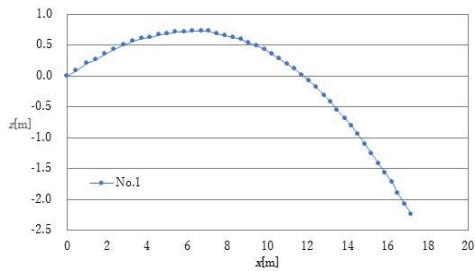


図 1. ボールの軌道データ(No. 1)[3]

前節で示した手順で、棄却サンプリングを用いて推定した抵抗係数の結果をヒストグラムとして図 2 に示した。縦軸は度数、横軸は  $C_D$  または  $C_L$  の値である。特に横軸は、その目盛に対して  $\pm 0.005$  の範囲を表している。サンプリング数は 10000 である。距離関数はデータ間の差の絶対値をとっている。

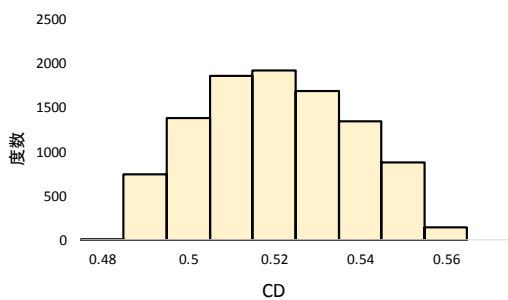


図 2. 抵抗係数の推定結果(No. 1)

表 1 は軌道データ No. 1, No. 8, No. 11, No. 17 を使用し、各軌道データでの閾値を  $\epsilon = 5.0, 2.5, 1.0$  としたときの抵抗係数と揚力係数の推定結果である。参照点数は 8 点である。表 2 は軌道データから最小二乗法(従来法)[3]で求めた抵抗係数と揚力係数の時系列データの平均値を表している。

表 1 の結果より、各軌道データで閾値を変化させても抵抗係数と揚力係数の平均値はほとんど差がみられなかった。また、従来法の結果ともほぼ一致した。軌道データ No. 8, No. 17 では、閾値が  $\epsilon = 1.0$  のときには結果は得られなかった。

表 3 は軌道データ No. 1 を使用して参照点数を 8 点, 16 点, 32 点, 44 点に増やし、閾値を  $\epsilon = 10, 5.0, 2.5$  と変化した抵抗係数と揚力係数の推定結果である。

表 3 の結果より、抵抗係数が 0.52 付近、揚力係数は 0.41 付近の度数が高くなった。従来法の平均値は、抵抗係数が 0.524, 揚力係数が 0.444 であり、今回の推定結果と従来法の結果を比較するとほぼ一致する。参照点数を増やしたことによる抵抗係数と揚力係数の値変化はみられなかったが、値のばらつきは少なくなった。

これらの結果から棄却サンプリング法を用いて軌道データから空力係数の推定が可能であると考えられる。

## 5 まとめと今後の課題

本研究では、飛翔中のボールの軌道データからボールに働く流体力を求めるために近似ベイズ計算(ABC)法の応用を考えた。特に ABC アルゴリズムの中で最も簡単なサンプリング法を用いて、軌道データから運動方程式中の抵抗係数と揚力係数の推定を試みた。

サッカーボールの軌道データを用いてボールに働く流体力の推定を行い、それによって計算値とデータとの距離を求める参照点数や、判定に必要な閾値の影響などを複数の軌道データに対して調べた。

その結果、軌道データによっては閾値のばらつきがみられたが、今回求めた結果と従来の最小二乗法で求めた時系列データの平均値がよく一致した。また、参照点の数や閾値による抵抗係数と揚力係数の変化はみられなかった。

本研究により、ベイズ推定を用いて軌道データからボールに働く流体力の推定が可能であることが示された。

今後の課題としては、軌道データの種類によって閾値のばらつきがみられることから、その適正值を決定する必要がある。また空力係数の時間的な変化を推定する方法の検討も必要である。

## 参考文献

- [1]安田海斗, 坪井一洋, 田中晃平, 宮寄武, 日本機械学会 シンポジウム:スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス, 2013
- [2]Tina Toni, David Welch, Natalja Strelkowa Andreas, Michael P.H Stumpf, J. R. Soc. Interface(2009)6, pp. 187-202
- [3]荒木田祐希, 飛翔中のサッカーボールに働く流体力, 茨城大学知能システム工学科卒業論文, 2015

表 1. 各軌道データの抵抗係数と揚力係数の平均値と最頻値

	No. 1				No. 8				No. 11				No. 17			
	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値
$\epsilon = 5.0$	0.537	0.5	0.416	0.47	0.141	0.15	0.105	0.11	0.334	0.33	0.228	0.2	0.424	0.43	0.348	0.36
$\epsilon = 2.5$	0.525	0.53	0.412	0.4	0.139	0.14	0.103	0.1	0.326	0.33	0.222	0.21	0.42	0.42	0.342	0.34
$\epsilon = 1.0$	0.52	0.52	0.411	0.41	-	-	-	-	0.32	0.32	0.212	0.21	-	-	-	-

表 2. 各軌道データの抵抗係数と揚力係数の平均値(従来法)

	No. 1		No. 8		No. 11		No. 17	
	CD(平均値)	CL(平均値)	CD(平均値)	CL(平均値)	CD(平均値)	CL(平均値)	CD(平均値)	CL(平均値)
従来法(平均値)	0.524	0.444	0.265	0.06	0.348	0.09	0.526	0.251

表 3. 軌道データ No. 1 の各点数での抵抗係数と揚力係数の平均値と最頻値

	16点				32点				44点			
	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値	CD(平均値)	最頻値	CL(平均値)	最頻値
$\epsilon = 10$	0.528	0.52	0.415	0.43	0.521	0.51	0.412	0.41	0.522	0.52	0.411	0.4
$\epsilon = 5.0$	0.522	0.52	0.412	0.41	0.518	0.52	0.41	0.41	0.518	0.52	0.411	0.41
$\epsilon = 2.5$	0.519	0.52	0.411	0.41	0.516	0.52	0.408	0.41	0.516	0.52	0.408	0.41