

最大投射角に対する揚力の影響

The Effect of Lift to the Maximum Projection Angle

発表者： 関原 来花

指導教員： 坪井 一洋

1 はじめに

多くの球技で使われるボールは空中で回転をしており、これによって揚力が発生する。そして、この揚力が飛距離を大きくする。しかし、回転するボールに働く空気力の測定は困難なため、ボールに働く空気力についてはいまだに不明な点が多い。特にボールに働く空気力はボールの形状や回転数によって複雑に変化する。このこともボールに働く空気力の解明を難しくしている。

その一方で、抵抗を受ける投射体の軌道を解析的に求めることも一般にはできていない。その結果として最大投射角についてもほとんどわかっていないようである。さらに、揚力の効果を含んだ質点の最大投射角についてはこれまでのところ全く結果が知られていない[1]。

本研究では、最大投射角に対する揚力の影響を調べる。そのために、速度の自乗に比例する揚力が働く場合と速度に比例する揚力が働く場合の運動方程式を導き、それを用いて軌道と最大投射角について比較・検討する。

2 運動方程式と線形化

質点の投射位置を原点にとる。そして、鉛直上向きにy軸をとり、水平方向にx軸をとる。質量と重力加速度をそれぞれ m と g とする。この質点には、図1に示すように重力 mg と揚力 L が働くとして抵抗は考えないものとする。

上記の条件下における質点の運動方程式と初期条件は次式ようになる[2]。

$$m \frac{du}{dt} = -lqv, \quad (1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = lqu - mg, \quad (2)$$

$$u(0) = q_i \cos\theta \equiv u_i, \quad v(0) = q_i \sin\theta \equiv v_i,$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad (3)$$

ここで (x, y) は、質点の位置ベクトルであり、 (u, v) は質点の速度ベクトルである。速度の大きさは q とする。また、 q_i と θ はそれぞれ初速度と投射角である。そして、 l は揚力の比例定数である。

式(1)~(3)を無次元化すると次式が得られる。式中の*が付いた量は無次元量である。

$$\frac{du^*}{dt^*} = -\varepsilon_L q^* v^*, \quad (4)$$

$$\frac{dv^*}{dt^*} = \varepsilon_L q^* u^* - 1, \quad (5)$$

$$u^*(0) = \cos\theta \equiv u_i^*, \quad v^*(0) = \sin\theta \equiv v_i^*, \quad (6)$$
$$x^*(0) = y^*(0) = 0, \quad (7)$$

ここで、 ε_L は式(7)で定義される重量揚力比と呼ばれる無次元パラメータである。

$$\varepsilon_L = \frac{lq_i^2}{mg}. \quad (7)$$

次に、式(8)によって線形化を行うと式(4)と式(5)はそれぞれ式(9)と式(10)となる[3]。

$$\beta \equiv \varepsilon_L q^* \approx \varepsilon_L, \quad (8)$$

$$\frac{du^*}{dt^*} = -\beta v^*, \quad (9)$$

$$\frac{dv^*}{dt^*} = \beta u^* - 1. \quad (10)$$

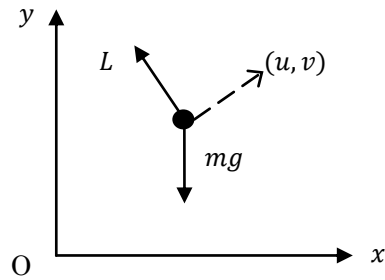


図1 質点の運動

3 シミュレーション結果

3.1 軌道の比較

速度の自乗と速度に比例する揚力が働いた場合の軌道を比較した結果を図2に示す。これは、重量揚力比0.5と投射角 33° の計算結果である。図2より、速度の自乗に比例する揚力が働く場合の軌道と速度に比例する揚力が働く場合の軌道は異なっていることが分かる。このように、 $\varepsilon_L \neq 0$ の場合には、速度の依存性によって軌道が異なる結果が得られた。

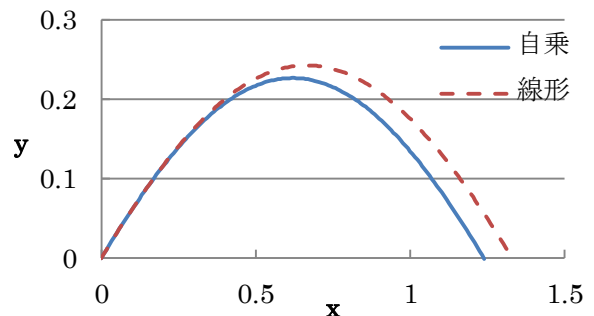


図2 速度との関係が異なる揚力による軌道比較

3. 2 最大投射角

速度の自乗と速度に比例する揚力が働く場合の最大投射角を求めた。式(4)～式(10)を用いて最大投射角を計算した。いくつかの代表的な重量揚力比に対して計算した。その結果を図3に示す。図3より、速度の自乗に比例する揚力が働く場合と速度に比例する揚力が働く場合の最大投射角は同じになることが確認できる。この結果は、重量揚力比が同じ場合、揚力の速度依存性が異なっても最大投射角が一致することを示している。

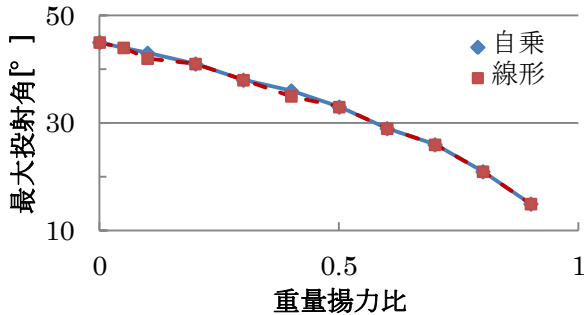


図3 最大投射角と重量揚力比

3. 3 飛距離と重量揚力比

速度の自乗と速度に比例する揚力が働く場合の最大投射角での飛距離を求めた。そして、いくつかの代表的な重量揚力比で飛距離を計算した。

その結果を図4に示す。図4より、重量揚力比が0のときを除いて、速度の自乗に比例する揚力が働く場合と速度に比例する揚力が働く場合の飛距離が異なっていることが分かる。さらに、速度に比例する揚力が働く方の飛距離が大きいことや重量揚力比が大きいほど飛距離の差が大きくなることも分かる。

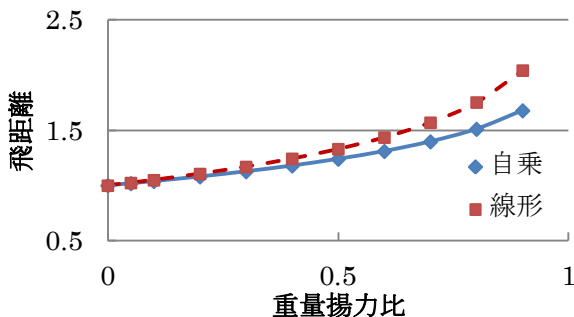


図4 飛距離と重量揚力比

3. 4 最大高さ

速度の自乗と速度に比例する揚力が働く場合の最大投射角時の軌道における最大高さを求めた。前節と同様に重量揚力比はいくつかの代表的な揚力係数で最大高さを計算した。

その結果を図5に示す。図5より、重量揚力比が0のときを除いて、速度の自乗に比例する揚力が働く場合と速度に比例する揚力が働く場合の最大高さは異なっていることが分かる。さらに、重量揚力比が大きいほど速度の自乗に比例する揚力と速度に比例する揚力の最大高さの差が大きくなる事が分かる。

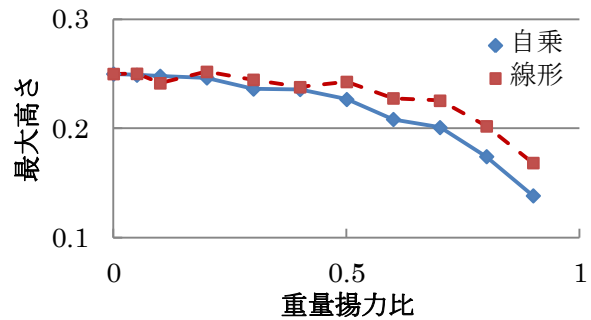


図5 重量揚力比と最大高さ

4 まとめ

最大投射角に対する揚力の影響を調べるため、速度の自乗に比例する揚力と速度に比例する揚力が働く投射体の軌道シミュレーションを行った。

重量揚力比を同じに設定してそれらの軌道を比較したところ、軌道は異なっていることが分かった。次に、最大投射角について比較したところ揚力と速度の関係に関わらず一致することが分かった。

そこで、最大投射角における飛距離や最大高さを比較した結果、速度の自乗に比例する揚力と速度に比例する揚力では飛距離と最大高さが異なっており、速度に比例する揚力が働く方が飛距離と最大高さが大きいことが分かった。

揚力の速度依存性が異なる場合、飛距離や最大高さなど軌道形状が異なるにもかかわらず、最大投射角は一致するという結果が得られた。しかし、その理由は現段階では不明であり、その解明が今後の課題である。

参考文献

- [1] 坪井一洋(2012)「抵抗と揚力の働く投射体の最大投射角」『日本機械学会論文集(C編)』78巻790号 pp.1972-1983
- [2] 今井功:『流体力学』, (裳華房, 1980)
- [3] 清水正之, 前田昌信: 『図解 流体力学の学び方』, (オーム社, 1989)