

重心低下を考慮した走り幅跳びの最適踏切角

The optimum takeoff-angle in long jump with vertical displacement

発表者：高橋 俊祐

指導教員：坪井 一洋

The optimum takeoff-angle in long jump with vertical displacement is obtained successfully. Then, it is confirmed that the effect of air-drag to the angle can be neglected. Also, the comparison of numerical solutions of the motion equation with flat aerial paths shows that flat aerial path can be used in the estimation of trajectory in long jump even with the vertical displacement.

1. はじめに

走り幅跳びは、陸上競技の跳躍競技に属する種目で、助走をつけて遠くへ跳ぶ能力を競う競技である。その動作は助走、踏切、空中、着地の4局面からなり、跳躍距離は助走を除く3局面によって決まる[1]。

また、跳躍距離は踏切足が踏切板をはなれた瞬間にほとんど決まってしまうといわれている[2]。よって、走り幅跳びの跳躍をモデル化する上で、空中動作をそれほど重要視する必要はないと考えられる。

したがって、空中移動中に選手に働く力は重力と空気による抵抗力だけであるから、選手の重心の軌跡は質点の運動方程式によって表すことができる。そして、その軌跡は放物線を描くので、跳躍距離を最大にする最適踏切角が存在する[3]。

重心低下を考慮しない場合の最適踏切角はすでに求められている。そこで、本研究では重心低下を考慮した場合の最適踏切角を求める。

2. 走り幅跳びの力学

空気中を運動する物体に働く抵抗の大きさは、一般に速度の自乗に比例することが知られている。したがって、空気抵抗と重力が働く質点の運動方程式は次式で表される。

$$\begin{cases} M \frac{du}{dt} = -k(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot u \\ M \frac{dv}{dt} = -k(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot v - Mg \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 u は水平方向速度、 v は鉛直方向速度を表す。 M 、 g 、 k はそれぞれ質点(選手)の質量、重力加速度、空気抵抗の比例係数を表す。

走り幅跳びは助走を伴った跳躍競技であるから、その踏切は図1のように考えることができる[3]。すなわち、速度 V で助走し、速度 w 、角度 ψ で踏み切るとする。

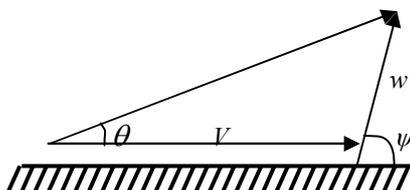


図1 踏切モデル

このとき、水平方向の初速度 u_i および鉛直方向の初速度 v_i は次式で表される。

$$\begin{cases} u_i = w \cos \psi + V \\ v_i = w \sin \psi \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ とする。

また、図1において θ は初速度のなす角を表し、以下の式で表される。

$$\tan \theta \equiv \frac{v_i}{u_i} = \frac{w \sin \psi}{w \cos \psi + V}$$

3. 跳躍軌道

式(1)を直接4次精度のRunge-Kutta法によって数値積分した結果と平坦軌道近似(flat aerial path)の比較を行った。平坦軌道近似とは式(3)で与えられ、Ward-Smithが論文中で用いた式である[4]。

$$y = x \left(\frac{v_i}{u_i} + \frac{Mg}{2ku_i^2} \right) - \frac{M^2 g}{4k^2 u_i^2} \left(\exp \left(\frac{2Mx}{k} \right) - 1 \right) \quad (3)$$

この式は $v/u \ll 1$ という条件で導出された。しかし、重心低下を考えた場合、この条件が当てはまらなくなることが考えられる。したがって、重心低下を考慮した場合にも、走り幅跳びの跳躍軌道を表現するのに、平坦軌道近似を用いることが可能かどうか調べる。

跳躍軌道を求めるために用いたデータを表1に示す。これは1983年のヘルシンキ世界陸上大会での上位12名の選手の平均値である[4]。

表1のデータを用いて求めた跳躍軌道を図2に示す。図2をみると、2つの軌道はほぼ一致しており、その差は軌道の後半部分で0.1~0.2mmである。この差は数値計算上の誤差と考えてもよい。したがって、重心低下があっても跳躍軌道は平坦軌道近似で表すことができる。

表1 ヘルシンキ大会の平均値

着地時の重心低下 h	0.5 [m]
水平初速度 u_i	10.1 [m/s]
垂直初速度 v_i	2.87 [m/s]
抵抗係数 k/M	3.09×10^{-3} [1/m]
初速度のなす角 θ	15.87 [°]
空中移動距離 L_2	7.23 [m]

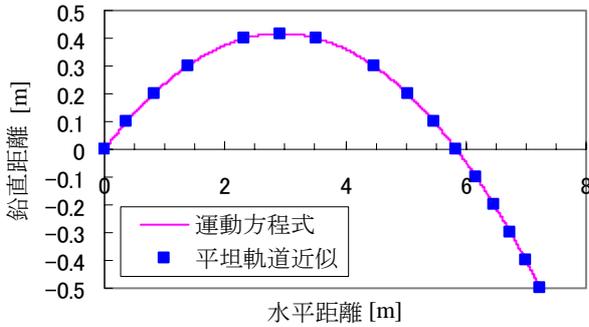


図2 跳躍軌道の比較

4. 最適踏切角の導出

重心低下がない場合、最適踏切角に対する空気抵抗の影響は 0.01° 程度である[3]。このことから、重心低下がある場合でも、最適踏切角を導出する上で空気抵抗を考慮する必要はないと予想できる。

着地点の低下、つまり重心低下を考慮した放物運動を考える。ただし、重心低下 h は鉛直下向きを正とする。このとき飛距離は以下の式で与えられる。

$$X = \frac{u_i}{g} \left(v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh} \right). \quad (4)$$

式(4)に式(2)の初速度を代入すると、走り幅跳びの跳躍距離 X は以下の式で表される。

$$X = \frac{1}{g} (w \cos \psi + V) \left(w \sin \psi + \sqrt{w^2 \sin^2 \psi + 2gh} \right), \quad (5)$$

式(5)に対して、 $dX/d\psi = 0$ より

$$2wV \cos^3 \psi + (2w^2 + V^2 + 2gh) \cos^2 \psi - (w^2 + 2gh) = 0. \quad (6)$$

ここで、式(6)において $h=0$ とすると最適踏切角は

$$\psi = \cos^{-1} \left[\frac{V}{4w} \left\{ -1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{w}{V} \right)^2} \right\} \right], \quad (7)$$

と求まる。これは重心低下がないときの最適踏切角と一致する[3]。

式(6)が3つの異なる実数解を持つことは以前に示した[5]。3つの実数解のうち、以下の解が求める最適踏切角を表す。

$$\psi = \cos^{-1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{V}{w} \right) \left\{ \left(\frac{w}{V} \right)^2 + \frac{gh}{V^2} + \frac{1}{2} \right\} \left(2 \cos \frac{\varphi}{3} - 1 \right) \right]. \quad (8)$$

ただし、

$$\cos \varphi = -1 + \frac{27}{2} \cdot \frac{\left(\frac{w}{V} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{w}{V} \right)^2 + \frac{gh}{V^2} \right\}}{\left\{ \left(\frac{w}{V} \right)^2 + \frac{gh}{V^2} + \frac{1}{2} \right\}^3}, \quad (9)$$

である。

式(8)を図に示すと図3のようになる。図3から w/V , gh/V^2 がそれぞれ大きくなるほど最適踏切角は小さくなることわかる。

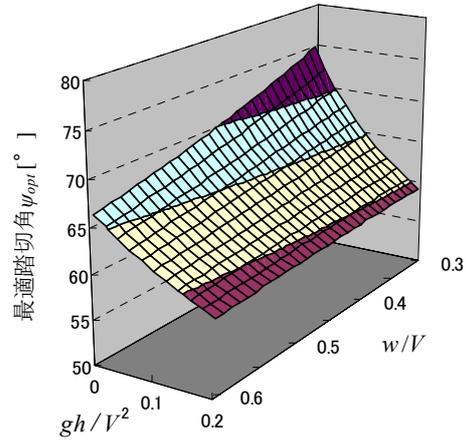


図3 最適踏切角

次に、最適踏切角に対する空気抵抗の影響を調べるために、表1のデータに基づいて、式(5)から求めた跳躍距離と3節で扱った運動方程式の Runge-Kutta 法による数値解の比較を行う。その結果を図4に示す。

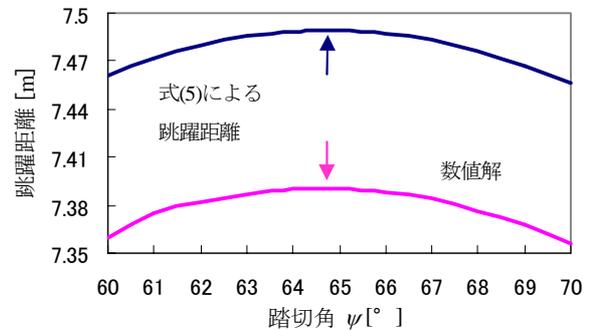


図4 踏切角に対する空気抵抗の影響

図4を見ると、最適踏切角はほぼ一致していることがわかる。その差は約 0.02° である。したがって、最適踏切角を導出するとき、空気抵抗の影響は無視してよいと考えることができる。また、空気抵抗の影響により跳躍距離が 10cm 程度減少することがわかる。

5. まとめ

運動方程式と平坦軌道近似の跳躍軌道の比較を行い、重心低下がある場合でも平坦軌道近似を用いることができることがわかった。次に、重心低下を考慮した最適踏切角を導出した。その結果、最適踏切角を考える際に、空気抵抗を考慮する必要がないことを確認した。

参考文献

- [1] 深代千之：跳ぶ科学，大修館書店，(1990)。
- [2] 三木章：高校生の陸上競技，講談社，(1981)，pp. 180–185。
- [3] 坪井一洋：走り幅跳びの踏切における最適角について，日本応用数学会論文誌，Vol.6, No.4, (1996)。
- [4] Ward-Smith, A. J.: Calculation of Long Jump Performance by Numerical Integration of the Equation of Motion, J.Biomechanical Engineering, 106 (1984), pp. 244–248。
- [5] 高橋俊祐：平成18年度卒業研究中間発表会予稿。