ソレノイダルなベクトル場の計算への GA の応用

Application of GA to calculations of the solenoidal vector field

発表者：竹中 望　　　指導教員：坪井 一洋

１．はじめに

ある空間領域でのベクトル量の分布が，微分可能で連続な場所のベクトル関数によって与えられているようなベクトル場を考える．

このベクトル場内に閉曲面 S を考えると S を通る流出量と流入量の各合計が等しいとき，このベクトル場をソレノイダルであるという．[1] 本研究の目的は遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm : 以下 GA)を用いて，磁場のようなソレノイダルなベクトル場を求めることである．

GA は多点探索なので局所解に陥りにくく，本問題のように解空間が広大となる問題に対して有効であると考えられる．

２．遺伝的アルゴリズム（GA）

遺伝的アルゴリズムとは生物が親から子へその形質を伝えつつ，環境に適応して進化していく過程を工学的にモデル化したものである．

生物の進化過程において母集団の中で，環境により適応した優良な個体がより高い確率で生き残るというメカニズムをモデル化し，環境に最もよく適応した個体，すなわち評価関数に対して最適値を与えるような適応度の高い解を求めるのが GA である.[2]

以下に，GA の基本操作を順を追って説明する.[3]

(1)初期集団の生成：複数個の個体をランダムに生成し，初期集合を作る．

(2)交叉：生物が交配によって子孫を残すことをモデル化したものであり，個体の染色体の一部をランダムに入れ替える．

(3)選択：個体集合中の各個体について，その適応度に応じて次世代に残す個体を選択する．

(4)適応度の評価：個体集合内の個体において，あらかじめ設定された評価関数の適応度を計算する．

(5)突然変異：個体のある遺伝子を一定確率で変化させる．例えば，遺伝子型(０と１又は整数，実数)がビット列の場合はある遺伝子座の０と１を入れ替え数字の場合は乱数で置き換える．そのため交叉では得られない解を得ることが出来る．

上記(2)から(5)を 1 世代として必要なだけ繰り返すことで世代を進める．

３．ソレノイダル場への応用

ソレノイダル場 f の条件は以下の式で表される．

$$\oint_S f_n dS = 0 \qquad (1)$$

(1)式の条件，つまり任意の閉曲面 S に対して発散が０となるようなソレノイダルなベクトル場に対して評価関数を定め，その解を GA によって求めることを考える．

今，ベクトル場 f として２次元の場を考える．この平面を矩形に分割して，各矩形の辺上でベクトル f の成分を定義する．平面領域を 3×3 に分割した例を図１に示す．

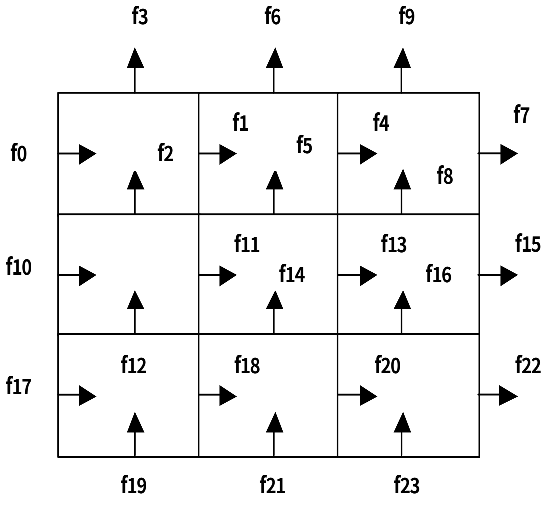

図１　3×3 のベクトル場の例

図１からベクトル場の評価関数 Z を次のように定義する．例えば，図１の中央にある矩形に対して(1)式を近似すると

$$⊿Z = \left| f_5 + f_{13} - f_{11} - f_{14} \right| \qquad (2)$$

となる．そこで，評価関数 Z を次式で定義する．

$$Z = \Sigma ⊿Z \qquad (3)$$

ただし，Σ は分割した全ての矩形に対する和を意味する．

４． 計算結果

ここでは分割として1×1，2×2，3×3の３種類を考えた．1×1の分割では４つのベクトル成分のうち２つに値を与えた．一方，2×2と3×3の分割では最外部にある辺上の成分を全て０とおいた．表１に計算で用いた計算条件を示す．

表１　　計算条件

突然変異確率	0.1，0.2，0.5
集団の大きさ	1000，2000 3000（1×1，2×2のみ）
世代繰り返し数	1000
解の範囲	0～10（1×1） －10～10（2×2，3×3）

図２には，３種類の分割での評価関数の履歴の例を示す．この例では，いずれも突然変異確率は0.1，集団の大きさは1000とし，ある１回の試行の結果である．

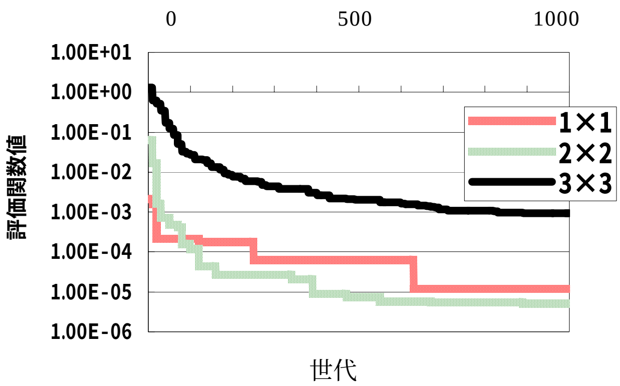

図２　各ベクトル場の履歴

また，表２には3×3の分割で突然変異確率0.1，集団の大きさ1000の試行で行われたベクトル場の例を示す． 表３から表５には，各分割での計算条件による最終的な評価関数値の比較をまとめる．表中の評価関数値は10回～20回の試行による平均値である．

表２　3×3ベクトル場の解および評価関数値

$Z=1.449\mathrm{e}{-03}$			
f_1	f_2	f_4	f_5
2.090e-01	2.091e-01	-3.055e-01	-5.144e-01
f_8	f_{11}	f_{12}	f_{13}
3.049e-01	9.635e-04	2.101e-01	4.497e-01
f_{14}	f_{16}	f_{18}	f_{20}
-6.567e-02	-1.447e-01	-2.106e-01	-1.448e-01

これらの結果を見ると計算条件が同じであるにもかかわらず，3×3 の分割での評価関数値は他の２つの分割での値より大きくなっていることが分かる．これはベクトル場の自由度が大きくなると評価関数の計算時の和の項数が増えるためと考えられる．

表３　Ｚの計算結果（1×1）[各試行回数10回]

突然変異確率	集団の大きさ	Z の平均値
0.1	1000	4.62E-06
0.1	2000	1.37E-06
0.1	3000	1.28E-06
0.2	1000	1.35E-05
0.5	1000	1.04E-05

表４　Ｚの計算結果（2×2）[各試行回数10回]

突然変異確率	集団の大きさ	Z の平均値
0.1	1000	2.73E-05
0.1	2000	7.18E-06
0.1	3000	2.88E-06
0.2	1000	2.98E-05
0.5	1000	0.0

表５　Ｚの計算結果（3×3）[各試行回数20回]

突然変異確率	集団の大きさ	Z の平均値
0.1	1000	1.30E-03
0.1	2000	8.87E-04
0.2	1000	1.82E-03
0.5	1000	4.36E-02

５．まとめ

ソレノイダルなベクトル場を求めるためにGAを応用することを試みた．２次元のベクトル場を矩形に分割し，離散化することで評価関数を定義した．

GA のパラメータを変化させても，それぞれの試行で解は収束し，試行ごとに異なるベクトル場が得られることを確認した．

また，集団の大きさを大きくすること，および適切な突然変異確率を用いることで解の精度が向上することが分かった．

文献

[1]熊谷信昭:「電磁理論」コロナ社(2001)

[2]三宮信夫，喜多一，玉置久，岩本貴本：「遺伝アルゴリズムと最適化」朝倉書店(1998)

[3]青木悠介：平成 19 年度　卒業研究論文「遺伝的アルゴリズムを応用した偏微分方程式の数値解法」