

# Bathtub vortex シミュレーションの高精度化

Bathtub vortex simulation of high accuracy

発表者 田名網 七音 指導教員 坪井 一洋

Bathtub vortex was simulated in smaller Reynolds number,  $Re=10^3$ , than the actual one. In order to obtain the solution of the actual Bathtub vortex, the third order upwind difference scheme is employed. The solution in  $Re=10^5$  is obtained successfully by using a grid system of pressure centered cell.

## 1. はじめに

Bathtub vortex とは, Fig. 1 のように洗面台や風呂桶から水が流れるときに流出口付近で現れる渦のことであり, 一般に北半球では反時計回りであるとされている. この現象が, 地球の自転によるコリオリ力の影響で発生しているかどうかを調べるため, ナビエ・ストークス方程式を用いた Bathtub vortex シミュレーションが行われ, レイノルズ数 1000 の解を得ている<sup>[1]</sup>. しかし, 実験により求めた Bathtub vortex のレイノルズ数は  $2.5 \times 10^5$  であり, 現実的な計算ができたとはいいがたい.

このような背景から, 本研究では Bathtub vortex シミュレーションをより現実に近づけるような別の計算方法を考える. これまではスタガード格子を用いた離散化を行っていたが, ここではレギュラー格子を基本として計算を行う. より高レイノルズ数の計算を行うために高精度化を行うが, その計算の検証には答えが既知である 3 次元 cavity 流れ問題を扱う. 検証の結果, 最も優れた計算方法を用いて, 現実の Bathtub vortex に近いシミュレーションを行う.

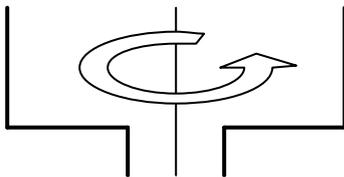


Fig. 1 Bathtub vortex の模式図

## 2. 基礎方程式

ここでは『地球』という回転盤に乗ったシンクを想定するので, 回転流体の基礎方程式を用いる. 無次元化したナビエ・ストークス方程式(1)-(3)と擬似圧縮法を用いた連続の式(4)を以下に示す.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w}{e} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{e} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

方程式中の  $e$  と  $Re$  はそれぞれロスビー数とレイノルズ数を表し, 以下のように定義される<sup>[2]</sup>.

$$e = U / (2\Omega L)$$

$$Re = LU / \nu$$

ここで  $U$  と  $L$  はそれぞれ基準となる流速と長さであり,  $\Omega$  は地球の自転角速度,  $\nu$  は流体の動粘性係数である. レイノルズ数は慣性力と粘性力の比であり, 小さい程粘性の力が大きくなる. また, ロスビー数は慣性力とコリオリの力の比であり, 小さい程回転の影響が大きいことになる.

## 3. 格子系による圧力振動の解消

レギュラー格子を用いると解にチェスボード状の圧力振動をもたらすと言われている. そこで, Fig. 2 のように各方向の流速と圧力を格子の交点で定義したレギュラー格子<sup>[3]</sup>と Fig. 3 のように圧力をセルの中心で定義したセル中心圧力格子の精度を比較するため, それぞれの格子を用いて Fig. 4 のような 3 次元 cavity 流れの問題<sup>[3]</sup>を解く.

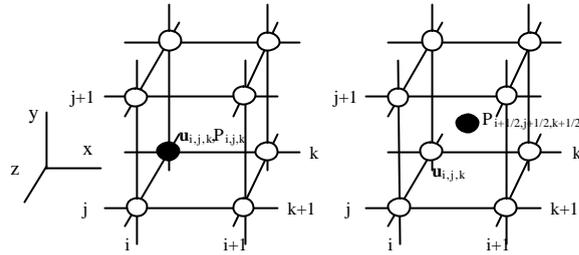


Fig. 2 レギュラー格子 Fig. 3 セル中心圧力格子

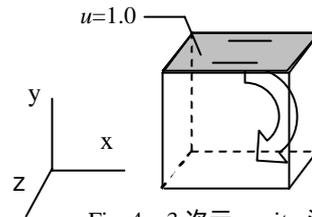


Fig. 4 3次元 cavity 流れ

対流項は 3 次精度風上差分<sup>[4]</sup>により離散化を行う. その一例を以下に示す.  $a$  は任意定数であり, 今回は河村スキームと呼ばれる  $a=3$  を用いることにする.

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cong \frac{u_i}{12\Delta x} [(1+a)u_{i-2} - (8+4a)u_{i-1} + 6au_i + (8-4a)u_{i+1} - (1-a)u_{i+2}] (u_i \geq 0)$$

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cong \frac{u_i}{12\Delta x} [(1-a)u_{i-2} - (8-4a)u_{i-1} - 6au_i + (8+4a)u_{i+1} - (1+a)u_{i+2}] (u_i < 0)$$

その他の項はレギュラー格子では 2 次精度中心差分, セル中心圧力格子では 2 次補間による 8 点を含む差分式を用いる. また, このモデルでは回転の影響を考えないので, ロスビー数は無限大となる.

初期条件は, 全ての格子点において流速, 圧力ともに 0 で一定であるとし, 静止した状態から計算を開始する. 境界条件に流速はディリクレ条件を, 圧力にはノイマン条件を用いる. ただし, セル中心圧力格子については圧力の境界条件は必要ない. その他の計算条件をまとめたものを Table 1 に示す.  $Re=1000$  における  $z$  軸方向の中央断面 ( $z=0.5$ )での計算結果を Fig. 5 と Fig. 6 に示す.

Table 1 3次元 cavity 流れの計算条件

格子幅( $x, y, z$ )	0.025
格子数	$40 \times 40 \times 40$
時間刻み幅( $\Delta t$ )	0.001
収束条件( $\epsilon$ )	$10^{-6}$
打ち切りステップ数	$10^6$

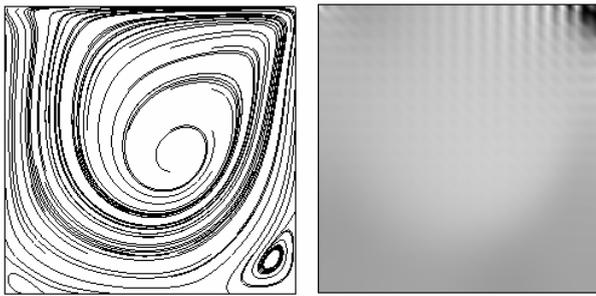


Fig. 5 レギュラー格子による計算結果(左:流線 右:圧力)

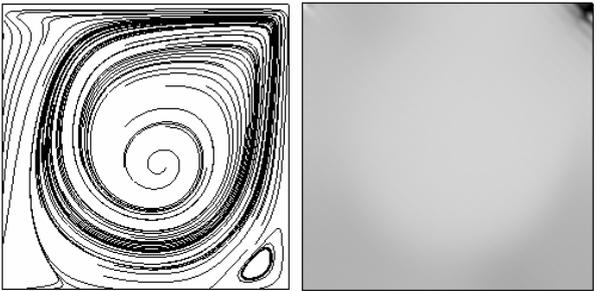


Fig. 6 セル中心圧力格子による計算結果(左:流線 右:圧力)

流線を見ると、どちらも 3 次元 cavity 流れの他の計算結果<sup>[5]</sup>とほぼ一致していることから、妥当な解が得られたといえる。しかし、レギュラー格子での圧力解には振動が発生している。圧力振動は、ナビエ・ストークス方程式より導かれる適切な境界条件<sup>[6]</sup>を用いても解消できない。これは、一つの格子に対する連続の式が自然に表現できないからであると考えられる。このことから、Bathtub vortex の計算にはセル中心圧力格子を用いることにする。

#### 4. Bathtub vortex シミュレーション

Fig. 7 に示すシンクを想定し、回転の影響を与えることによって水が流出する際に渦が発生する様子を計算する。このモデルでは流出した分と同量の水が上面から流入するようにし、水面を考えないことにする。

境界条件として、流出口の流速にはディリクレ条件を用い、流速  $v=-1.0$  を与える。流入部である上面ではノイマン条件を用いる。その他の計算条件は cavity 流れの計算と同様に Table 1 を用いる。 $Re=1000$ ,  $\nu=0.68$  と  $Re=10^5$ ,  $\nu=0.68$  の 2 通りの計算結果を Fig. 8 と Fig. 9 に示す。なお、 $Re=10^5$  の計算を行うには 3 次精度風上差分の人工粘性の係数を  $\alpha=10$  にする必要があった。

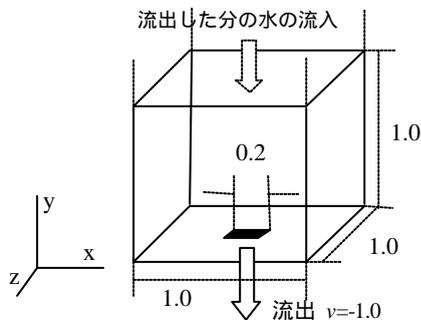


Fig. 7 シンクのモデル

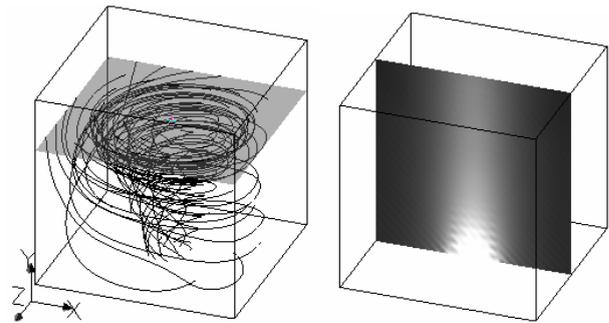


Fig. 8 流線(左)と圧力(右),  $Re=1000$ ,  $\nu=0.68$

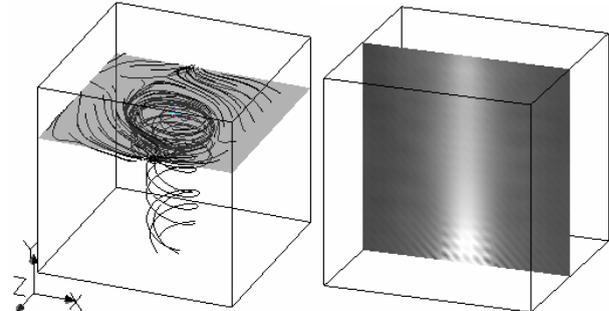


Fig. 9 流線(左)と圧力(右),  $Re=10^5$ ,  $\nu=0.68$

流線を見ると、渦を巻きながら流出口から水が流出する様子が現れている。このことから、高レイノルズ数での計算が可能となったと言える。

ただし、本来の Bathtub vortex のロスビー数は  $6877^{[1]}$  であるから、今回の結果は現実の地球の回転を 10000 倍したものに相当する。高レイノルズ数においてロスビー数を大きくすると解が求まらなかった。低レイノルズ数では粘性による影響が大きく、圧力が振動しても流速の定常解が得られる。しかし、レイノルズ数が高いと粘性の効果が弱くなるため、定常な解が得られないと考えられる。

#### 5. まとめと今後の課題

3 次元 cavity 流れシミュレーションを通して、セル中心圧力格子を使用することで連続の式を満たすような解が得られた。この格子を用いた Bathtub vortex シミュレーションではレイノルズ数のオーダーを  $10^5$  まで上げることができ、現実の Bathtub vortex により近づくことができた。残された課題は、高レイノルズ数において、ロスビー数を大きくすると正しい解が得られない原因を特定し、解決することである。

#### 参考文献

- [1] 森秀俊: Bathtub vortex におけるコリオリ力の影響, 平成 14 年度卒業研究論文, 2003
- [2] 加藤 宏: 水力学・流体力学, 朝倉書店, 1984, p. 49
- [3] 峯村吉泰: Java による流体・熱流動の数値シミュレーション, 森北出版株式会社, 2001, pp.88-89
- [4] 松下通紀, 別府史士, 赤松映明: 日本機械学会論文集 (B 編)52 巻 480 号, 1986, pp.2810-2818
- [5] 棚橋隆彦, 灘口明彦: ターボ機械第 15 巻第 6 号, 1987, pp.323-330
- [6] S.ABDALLAH: JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 70, (1987), pp.193-202