

微粒子の壁面衝突条件に関する数値的研究

Numerical study on wall-collision condition of small particle

1. はじめに

過冷却状態の霧[1],浮遊性粒子状物質[2]あるいは血液等,多数の微粒子を含む流れは自然界に多く存在する.これらの流れの理解には流体中に含まれる微粒子の運動のモデル化が本質的な役割を果たす.

通常,粒子の運動のモデル化に用いられる Stokes の抵抗係数では,粒子径が大きい場合や流速が大きい場合に,粒子に働く抵抗を実測値より小さく仮定している.

本研究では,Stokes の抵抗係数と実測値にしたがう Clift の抵抗係数との差異を,粒子の壁面衝突条件について数値シミュレーションすることで検討する. また,異なる St と R の値に対して粒子の衝突時間についても調べる. これによって,粒子径や初速度が粒子の運動に与える影響を明らかにする.

2. 微粒子の運動方程式

流体抵抗のみが働く粒子の運動方程式は次のようになる.

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}_p}{dt^2} = \frac{1}{2} \rho_a \cdot C_D \cdot S \cdot \left| \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \right| \cdot \left(\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \right) \quad (1)$$

ここで, m は粒子の質量, \mathbf{x}_p は粒子の位置, ρ_a は流体の密度, S は粒子の断面積, \mathbf{u} は粒子位置での流体の速度, C_D は抵抗係数である. 式(1)中の \mathbf{u} について, Fig.1 のようにポテンシャル流れの一種であるよどみ点流れを考えることで粒子の運動は 1 次元運動となり簡単化される.

$$\mathbf{u} = -\frac{U}{l} \cdot \mathbf{x}_p \quad (2)$$

ここで, U は代表速度, l は流れの速度が代表速度になるまでの原点からの距離である.

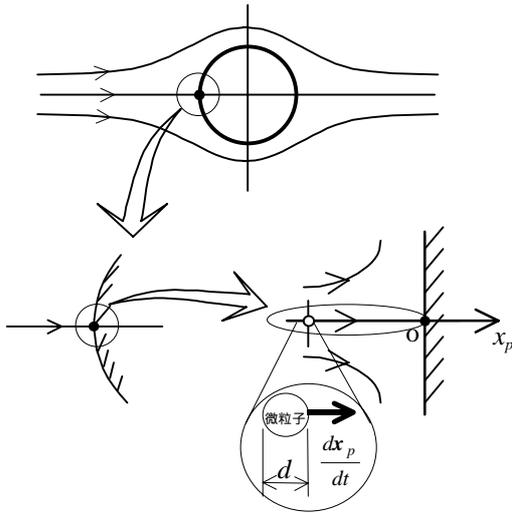


Fig.1 よどみ点付近での粒子の 1 次元運動

一方,抵抗係数 C_D は粒子レイノルズ数 R_d によって決まる. 例えば Stokes の抵抗係数の場合,球形の粒子に対して

$$C_D = \frac{24}{R_d} \quad (3)$$

の関係がある. ここで,

$$R_d = R \cdot \frac{d}{L} \cdot \left| \frac{x_p}{l} - \frac{dx_p}{dt} \right| \quad (4)$$

$$R = \frac{\rho_a \cdot U \cdot L}{\mu_a} \quad (5)$$

である. ここで, d は粒子の直径, L は代表長さ, R はレイノルズ数であり,本研究においては R が大きいほど粒子の初速度が大きいことを意味する.

また, R_d に対する C_D の一般形がいくつか知られている [3] [4] が抵抗係数の実測値にしたがう Clift らにより求められた式(6)を用いることにする. すなわち,

$$C_D = \frac{24}{R_d} (1 + 0.15 \cdot R_d^{0.687}) \quad (6)$$

ここで, 抵抗係数について式(3),式(6)と実測値[5]を Fig.2 に示す. 式(6)では R_d の広範囲にわたって C_D が実測値と一致していることがわかる.

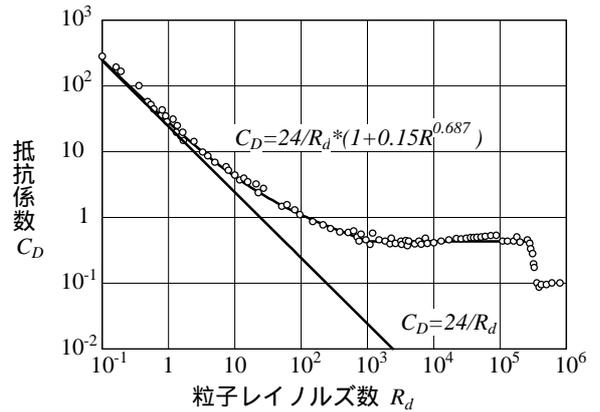


Fig.2 抵抗係数と粒子レイノルズ数

3. 微粒子の壁面衝突条件

式(1)に対して式(2)と Stokes の式(3)を用いると 1 次元化された粒子の運動方程式として次式が得られる.

$$St \cdot \frac{d^2 x_p}{dt^2} + \frac{dx_p}{dt} + \frac{x_p}{l} = 0 \quad (7)$$

ここで, x_p は無次元化された粒子の位置である(Fig.1 参照). また, St は次式で定義されるストークス数である.

$$St \equiv \frac{1}{18} \cdot \frac{\rho_w}{\rho_a} \cdot R \cdot \left(\frac{d}{L} \right)^2 \quad (8)$$

ここで, ρ_w は粒子の密度である. 本研究では St は粒子径 d を与える変数として用いており, St が大きいほど粒子の慣性が大きいことを意味する.

(7)式は線形微分方程式であるから解析的に解くことができる. 粒子の衝突条件

$$x_p \geq 0 \quad (9)$$

を(7)式に適用することによって壁面衝突条件として

$$St \geq \frac{1}{16} \quad (10)$$

が得られる[6].

一方, Fig.2 で $1 < R_d$ のとき Stokes の抵抗係数は実測値と一致しない. したがって, この範囲の R_d に対する粒子の壁面衝突条件は式(10)と異なるはずである. 実際, 式(6)を用いた場合の粒子の運動方程式は次式ようになる.

$$St \cdot \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \left(-\frac{x_p}{l} - \frac{dx_p}{dt} \right) \cdot (1 + 0.15 \cdot R_d^{0.687}) \quad (11)$$

式(11)は非線形であるため, その解を解析的に求めることはできないので数値シミュレーションによって壁面衝突条件を調べる.

4. 計算結果と考察

数値シミュレーションによって得られた, 粒子が衝突するまでの時間を St の関数として Fig.3 に示す. 図中の t_s, t_c はそれぞれ Stokes の抵抗係数と Clift の抵抗係数を用いた場合の衝突時間をあらわす. また, 異なる R に対する結果をそれぞれプロットしている.

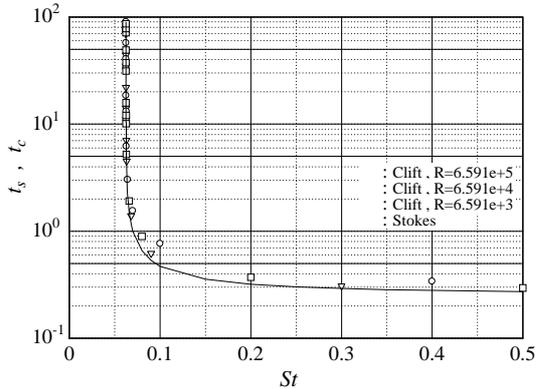


Fig.3 壁面衝突条件と衝突時間

この図より, 抵抗係数による壁面衝突条件の違いは見られず, いずれの抵抗係数の場合にも $St = 1/16$ が衝突条件を与えることがわかる. これは, $St \rightarrow 1/16$ のとき, $R_d \rightarrow 0$ となることから Stokes, Clift それぞれの抵抗値の差が小さくなるためと考えられる.

一方, 粒子が壁面に衝突するまでの時間を考えると, 抵抗式による差が見られた. この結果を示したのが, Fig.4 である. この結果より R が大きいほど両者の差が大きくなること及び, 各 R に対して衝突時間の差が最大になる St が存在することがわかる.

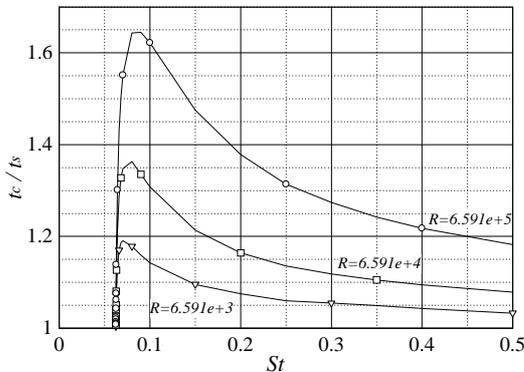


Fig.4 壁面衝突条件と衝突時間の比

つぎに, Fig.4 から $t_c/t_s, St$ それぞれのピーク値 $(t_c/t_s)_{\max}$ と St_{\max} を R の関数としてプロットした結果を Fig.5, Fig.6 に示す.

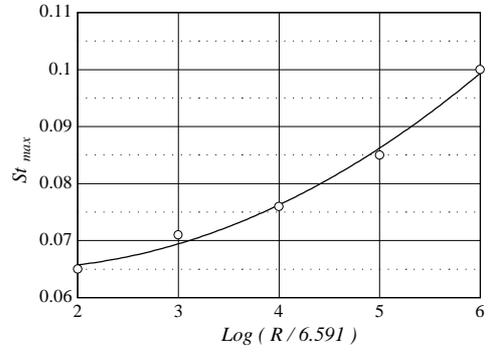


Fig.5 ピーク値 St_{\max} のレイノルズ数依存性

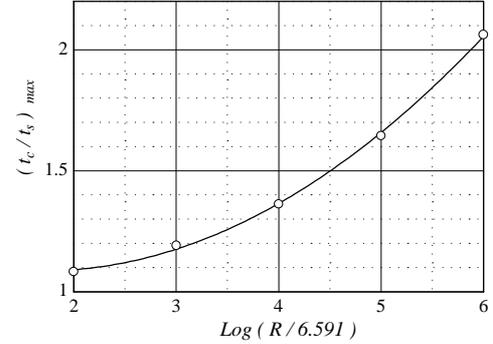


Fig.6 ピーク値 $(t_c/t_s)_{\max}$ のレイノルズ数依存性

すなわち, R が大きくなると $(t_c/t_s)_{\max}, St_{\max}$ ともに大きくなることからわかる. さらに, これらの図よりそれぞれの関数を内挿によって求め次式を得た.

$$St_{\max} = 0.00157 * (\text{Log}R)^2 - 0.00417 * \text{Log}R + 0.06760,$$

$$\left(\frac{t_c}{t_s} \right)_{\max} = 0.05205 * (\text{Log}R)^2 - 0.26063 * \text{Log}R + 1.4119.$$

5. 結論

流体中に含まれる微粒子の運動を調べるために, よどみ点流れにもとづく簡単な一次元運動を考え, 粒子の壁面衝突条件について調べた. とくに粒子に働く抵抗係数として Stokes の抵抗係数と実測値にもとづく Clift の式を考え, 粒子の運動に対するそれらの差異を明確にした. その結果, 壁面衝突条件については両者の差はなく, いずれの場合も $St = 1/16$ であった.

一方, 衝突するまでの時間については両者には明確な違いがあることがわかり, R が大きくなるほど, その差が顕著になることを示した. この事実は粒子の 2 次元運動において重要な意味を持つと考えられ, 2次元物体への衝突条件に影響するものと思われる[7].

参考文献

- [1] 坪井・木村: 粒子径分布を持つ液滴流の数値シミュレーション, 第 11 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, p.233, (1997)
- [2] 「大気汚染の“真犯人”究明へ PM2.5 正体不明の超微粒子」4月19日付朝日新聞朝刊, (1998)
- [3] Clift, R., Grace, J.R. & Weber, M.E.
- [4] Chow, C.Y. “An Introduction to Computational Fluid Mechanics”, Wiley, New York, p.7, (1979)
- [5] 宮井・木田・仲谷「水力学」森北出版, p.165, (1983)
- [6] Taylor, G.I.; Rept. Memo., No.2024(A.R.C.), (1940)
- [7] Edward M.Gates; “A Computational Investigation of Water Droplet Trajectories”, J.Atmos.OceanicTech., vol.5, (1988)