

自由落下する球に働く非定常流体力の解明

Clarification of unsteady fluid force acting on a sphere in free falling

発表者： 渡辺卓馬

指導教員： 坪井一洋

1 はじめに

一般的に、スポーツで使用されているボールの空気抵抗は、風洞実験により測定されている。風洞実験では、常に一定の気流（定常流）を送ることにより空気抵抗を測定している。しかし、実際にはボールは加減速しながら飛んでおり、周りの気流が常に変化する（非定常流）。そのため、風洞実験とは条件が異なり、測定された空気抵抗が正確であるとは言い難い。

そこで最近では、投射されたボールの軌道から抵抗係数を推定する研究が行なわれている。そして、時間が進むにつれてボールの抵抗係数が減少していく結果が報告されている[1]。

本研究では、抵抗係数の減少は非定常流体力の影響であると推測した。そこで、非定常流体力を解明するために、自由落下するボールの軌道から抵抗係数を推定する。また、風洞実験における抵抗係数との比較を行なう。

2 抵抗理論

流体の抵抗には、ストークスの抵抗法則とニュートンの抵抗法則という 2 種類の抵抗法則が存在する。また、これらの抵抗法則はレイノルズ数 Re と大きく関係している。ここで、レイノルズ数は速度を無次元化した値であり、(1)式で定義される。

$$Re = \frac{vr}{\nu} \quad (1)$$

このとき、 v は球の速度、 r は球の半径、 ν は動粘性係数である[2]。

ストークスの抵抗法則は、レイノルズ数が 1 より小さい場合に成り立つ。ボールを自由落下させた際に、 $Re = 1$ となるまでの時間は $10^{-5} \sim 10^{-6}$ s 程度であり、その間に落下する距離は 10^{-8} m と非常に短い。このことから、ボールの自由落下においてはストークスの抵抗法則は実際には無視できる。そこで以下では、ニュートンの抵抗法則のみを考えることにする。

ニュートンの抵抗法則では、抵抗は物体の速さの 2 乗に比例する。鉛直下向きを正とすると、自由落下する球の運動方程式は(2)式となる。

$$m\dot{v} = mg - k_N mv^2 \quad (2)$$

このとき、 m は球の質量、 \dot{v} は球の加速度、 g は重力加速度、 k_N は抵抗係数である[3]。

ニュートンの抵抗法則より、 k_N は(3)式のように表すことができる。

$$k_N = \frac{C_D \rho S}{2m} \quad (3)$$

ここで、 C_D は無次元の抵抗係数、 ρ は流体の密度、 S は球の断面積である[2]。

自由落下の条件で(2)式を積分することで、速度 v と落下距離 z はそれぞれ(4)式と(5)式となる。

$$v = \sqrt{\frac{g}{k_N}} \tanh(\sqrt{k_N g t}) \quad (4)$$

$$z = \frac{1}{k_N} \log(\cosh(\sqrt{k_N g t})) \quad (5)$$

このとき、 t は時間である。

3 実験方法

本研究では、卓球ボールとサッカーボールの落下実験を行なった。まず、実験を行なうにあたり、(3)式と(5)式を用いて、卓球ボールとサッカーボールの落下距離を評価した。その際、 $C_D = 0.47$ 、 $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ とした。評価した結果から 0.7 s 間で約 2.2~2.4 m 落下することがわかった。この結果から、本実験では約 2.5 m 地点からボールを落下させることにした。

軌道の測定にはデジタルカメラを用いる。カメラ位置は、落下場所から 6 m 離れた地点で高さは 1.25 m とした。このとき画像の 1 ピクセルは 1.51 cm となった。撮影は 240 fps で行なった。

撮影した動画からボールの位置座標を読み取るために、市販のソフトウェア「PV Studio 2D」を使用した。

4 実験結果

測定した軌道データから抵抗係数を推定した。ここで、抵抗係数は速度と加速度から導出する。軌道データから加速度を求めるには時間について 2 次以上の関数が必要となるため、軌道データを部分的に 2 次関数で補間した。

補間に用いた軌道データ間隔を n で表わす。このとき、 $n = 1$ は隣り合う 3 点、 $n = 2$ は連続した 5 点の両端点と中央点の 3 点による補間を意味する[1]。

$n = 30$ で推定した卓球ボールとサッカーボールの抵抗係数と風洞実験の結果の比較を、図 1~図 3 に示す。これらの図では、横軸はレイノルズ数である。なお、図 2 は図 1 の $Re \geq 3.0 \times 10^3$ の範囲を拡大したものである。自由落下は加速運動なので、図では時間の進行に伴い図の左から右へと移動する。

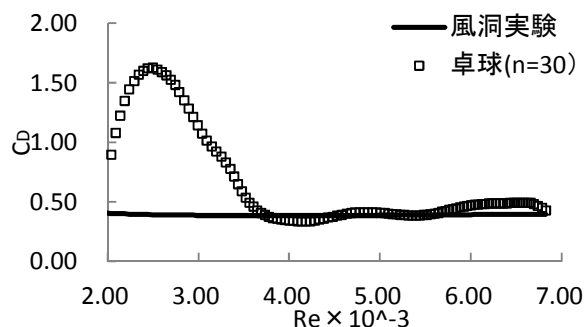


図 1 卓球ボールの抵抗係数

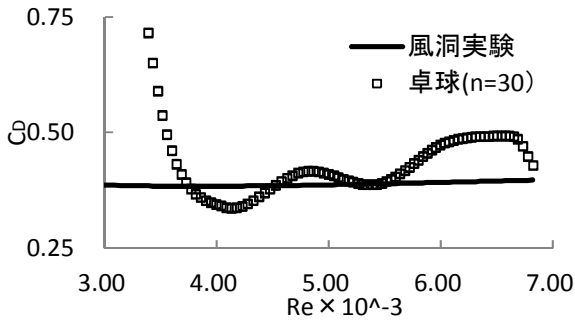


図2 図1の拡大図($Re \geq 3.0 \times 10^3$)

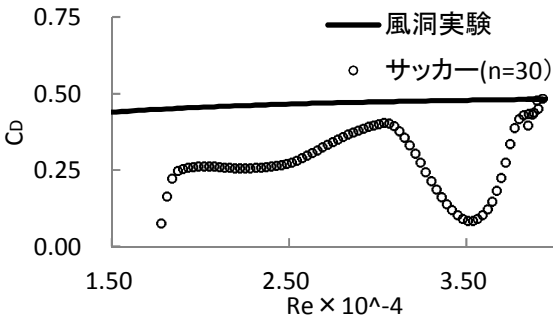


図3 サッカーボールの抵抗係数

図中の風洞実験の結果 C_D^{WT} は風洞実験の実測値を補間した(6)式を用いた[4].

$$C_D^{WT} = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687} + 0.0175Re \times (1 + 4.25 \times 10^4 Re^{-1.16})^{-1}) \quad (6)$$

まず、図1の結果において、卓球ボールの抵抗係数は、 $Re = 3.5 \times 10^3$ までは大きくばらつく結果となったが、それ以降では風洞実験の結果とほぼ一致している。

図1を拡大した図2では、卓球ボールの抵抗係数は、 $Re \geq 4.5 \times 10^3$ で風洞実験の結果より大きくなった。また、レイノルズ数が増えるにつれて抵抗係数が増加する傾向が見られた。

図3のサッカーボールの結果では、 $Re = 2.0 \times 10^4$ 付近から抵抗係数が安定しており、風洞実験より小さくなる結果が出た。このことから、サッカーボールの推定結果において、抵抗係数の値が急激に小さくなるドラッグクライシスが起きていると考えられる。また、サッカーボールでもレイノルズ数が増えるにつれて抵抗係数が増加する傾向が見られた。

5 非定常流体力

非定常流体力を考えるには、球の周りの空気の運動も考慮しなければならない[5]。そのため、物体の形状に依存した質量(付加質量)による抵抗を運動方程式に加える必要がある。この付加質量を $\alpha m'$ とし、ニュートンの抵抗法則の条件下で運動方程式をたてると(7)式となる。ここで、 α は付加質量に関する係数である。さらに、(7)式を書き換えると(8)式となる。

$$(m + \alpha m') \dot{v} = -k_N m v^2 + mg \quad (7)$$

$$\dot{v} = - \left(k_N v^2 + \alpha \frac{m'}{m} \dot{v} \right) + g \quad (8)$$

ここで、(8)式右辺の()内は非定常流体力を含んだ空

気抵抗である。その抵抗を $C_D \rho S v^2 / 2m$ とする。また、 $k_N v^2$ は定常流体力における空気抵抗であるため、 $C_D^{WT} \rho S v^2 / 2m$ となる。さらに、 V を球の体積とすると $m' = \rho V$ と表わされる。よって、(8)式右辺の()内は(9)式となる。また、(9)式より α は(10)式と求まる。

$$\frac{C_D \rho S v^2}{2m} = \frac{C_D^{WT} \rho S v^2}{2m} + \alpha \frac{\rho V}{m} \dot{v} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{S v^2}{V \dot{v}} (C_D - C_D^{WT}) \quad (10)$$

卓球ボールとサッカーボールのデータから α を求めた結果を図4に示す。ここで、サッカーボールの場合はドラッグクライシスが発生していると仮定し、 C_D^{WT} はドラッグクライシス発生後の抵抗係数 ($C_D^{WT} = 0.2$) とした[1]。図では横軸は経過時間である。

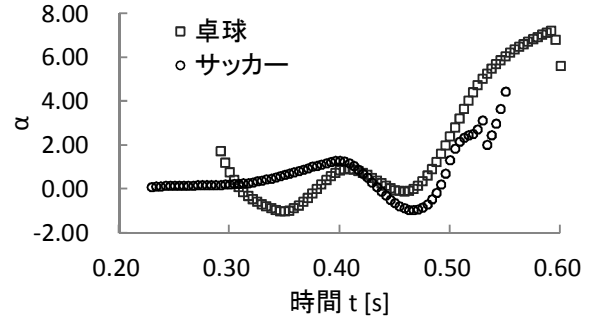


図4 係数 α の推定結果

図4の結果を見ると、時間が進むにつれて α の値が増加する傾向が見られた。このことから、加速するにつれて、非定常流体力の影響が大きくなると考えられる。

また、卓球ボールの α の増加は、サッカーボールと比べて大きいことがわかる。これより、卓球ボールはサッカーボールと比べて、非定常流体力の影響が大きいと考えられる。

6 まとめと今後の課題

本研究では、球に働く非定常流体力を解明するために自由落下するボールの軌道を測定し、その軌道から抵抗係数を推定した。また、推定結果から付加質量による慣性抵抗を求めた。

推定結果より、レイノルズ数が増えるにつれて抵抗係数が増加する傾向が見られた。また、付加質量による抵抗を求めた結果、時間が進むにつれて付加質量による慣性抵抗が増加する傾向が見られた。

今後の課題としては、投射されたボールのように2次元運動に対して働く非定常流体力を解明することを計画している。

参考文献

- [1] 安田: ボール軌道の特徴量に基づく空力係数の推定法, 茨城大学知能システム工学科卒業論文 2013.
- [2] 加藤: 『ポイントで学ぶ流れの力学』, (丸善, 2002) pp. 64-71.
- [3] 原島: 『力学I』, (裳華房, 1978) pp. 38-45.
- [4] C.Crowe, M.Sommerfeld and Y.Tsuji: "Multiphase flows with droplets and particles", (CRC PRESS, 1997) pp. 70-72.
- [5] 菊池, 今野, 市川, 窪田, 望月: 水中を落下する球に作用する非定常抵抗の係数, 日本機械学会論文集(B編), 79巻, 798号(2013).