近似ベイズ計算法による飛翔体の空力係数推定
Estimation of aerodynamic coefficients for a projectile by approximate Bayesian computation

発表者: 會澤 和希　　指導教員: 坪井 一洋

1 はじめに

空力係数は物体の空力特性を表す代表的なパラメータである．空力係数を求める代表的な方法として風洞実験[1]があるが, 風洞実験でその時間変化を求めることは難しい. さらに, 飛翔体の運動方程式は時間に関する微分方程式であるため, 風洞実験で得られる空力係数を物体の運動方程式に基づく時間変化と直接対応させることも難しい.

風洞実験と異なる実験方法のひとつに，軌道を局所的に最小二乗法で近似して空力係数の時間変化を求める手法（補間法）がある．しかし，この手法では軌道データの測定誤差の影響が強く出るため，加速度の推定精度が悪化し，結果的に空力係数の推定結果に強く影響する[2].

そこで，近似ベイズ計算法(ABC 法)による空力係数の推定が試みられた[3]．ABC 法には加速度を直接使わず推定可能であるという利点がある．しかしながら，推定に用いる初速度や閾値が空力係数の推定結果に大きく影響することが明らかになっている.

そこで，本研究では最適な初速度を調べる．さらに，ABC 法では適切な閾値を設定する必要があるため，軌道データの測定誤差を基準として閾値を決定する方法を考察する.

2 運動方程式

投射位置を座標原点として鉛直上向きにz軸を取り, 初速度ベクトルがx-z平面内に含まれるようにx軸を定義する.

空気中において飛翔体には速度の 2 乗に比例する抵抗と揚力が働くので，その運動方程式は次式となる[4].

$$\dot{u} = -\frac{\rho S q}{2m}(C_D u + C_L w) \qquad (1)$$

$$\dot{w} = -\frac{\rho S q}{2m}(C_D w - C_L u) - g \qquad (2)$$

ここで, (u, w)と $q = \sqrt{u^2 + w^2}$ は飛翔体の速度ベクトルと速さである．また，mとSは飛翔体の質量と投影断面積，gは重力加速度，ρは空気密度，C_DとC_Lはそれぞれ抵抗係数と揚力係数である.

3 ABC 法

ベイズ統計学において尤度関数は計算上扱いにくいうえ，計算コストがかかるという問題がある．ABC 法はシミュレーション・データと実測データを比較することで，尤度の計算を回避し事後分布を推定することができる[5].

ABC 法において最も単純な手法である Rejection sampler(RS)法の手順を以下に示す.

1） 軌道データから位置と初速度を計算する.
2） 抵抗係数 C_Dと揚力係数 C_Lをサンプリングする.
3） C_DとC_Lを運動方程式に代入し，積分して軌道を求める.
4） 得られた軌道と実測データから式(3)で示すユークリッド距離を計算する．x_dとz_dは実測データの座標，xとzは運動方程式から計算された座標である．ここで，t_iは距離を求める時刻である.

$$d^2 = \sum_{t_i}\left(\left(x(t_i) - x_d(t_i)\right)^2 + \left(z(t_i) - z_d(t_i)\right)^2\right) \qquad (3)$$

5） 距離関数の値が閾値以下であればそのC_DとC_Lを受理する.
6） 必要なサンプリングサイズを得るまで 2)～5)を繰り返す.

4 推定結果

4.1 RS 法による結果

図 1 に示す軌道 No. 2[6]に対してサンプリングサイズ 1000，閾値を 5.0 としてC_DとC_Lを推定した．推定結果のC_Dを階級幅 0.025 のヒストグラムにしたものが図 2 である．異なる軌道データに対して同じ閾値で推定すると，C_Dの推定値の幅が近くなった．C_Lに対しても同様の結果が得られた.

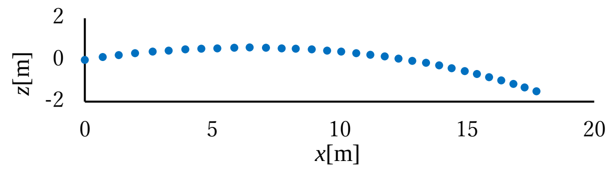

図 1　軌道 No. 2 の軌道データ

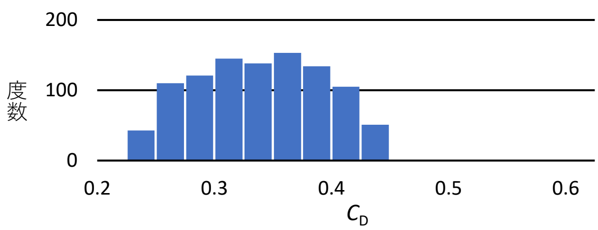

図 2　閾値 5.0 でのC_Dの推定結果(軌道 No. 2)

4.2 初速度の影響

ここでは，いくつかの計算式で初速度を求め，補間法の結果と比較することで最適な初速度を調べる．初速度は軌道データから 2 次精度中心差分と 2 次精度前進差分で求める．また，軌道データに含まれる誤差の影響を小さくするために，軌道上の全位置データを最小二乗法で 3 次式近似し，その時間微分から初速度を得る(以下, 最小二乗近似と呼ぶ)．これらの計算式で求めた初速度を用いることで, RS 法で抵抗係数C_Dと揚力係数C_Lを推定する.

軌道 No. 2 と軌道 No. 3 の抵抗係数C_Dの推定結果をそれぞれ図 3 と図 4，揚力係数C_Lの推定結果を図 5 と図 6 に示す．サンプリングサイズを 1000，閾値を 5.0 とした．RS 法における結果はすべて平均値で，水色が 2 次精度中心差分，青色が 2 次精度前進差分，橙色が最小二乗近似，灰色が補間法の

結果である．横軸はレイノルズ数であり，これは速度の無次元化に対応する．

抵抗係数 C_Dにおいては，図 3 と図 4 のように 2 次精度前進差分や 2 次精度中心差分の推定結果が補間法の結果の範囲外にある軌道データが確認できた．最小二乗近似の推定結果はすべて補間法の結果の範囲内に収まっていたため，C_Dの推定は最小二乗近似が最も適していると考えられる．

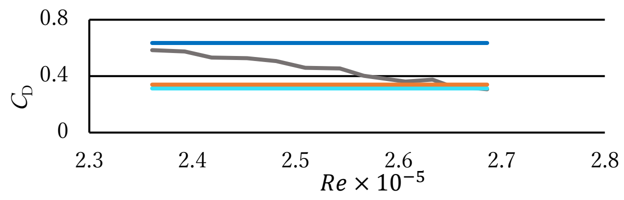

図 3　軌道 No. 2 の抵抗係数C_D

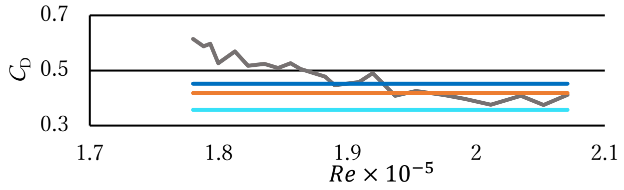

図 4　軌道 No. 3 の抵抗係数C_D

一方，揚力係数 C_Lはどの初速度でも補間法の結果の範囲外となる軌道データが存在する．補間法では空力係数が軌道に沿って変化すると仮定して計算しているが，RS 法では空力係数一定で推定している．今回の結果は空力係数の時間変化を考慮する必要があることを示唆している．

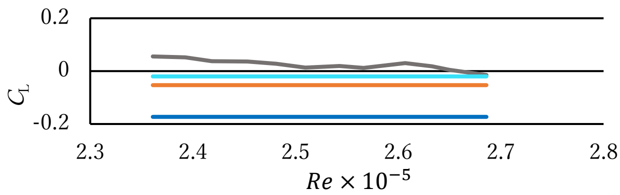

図 5　軌道 No. 2 の揚力係数C_L

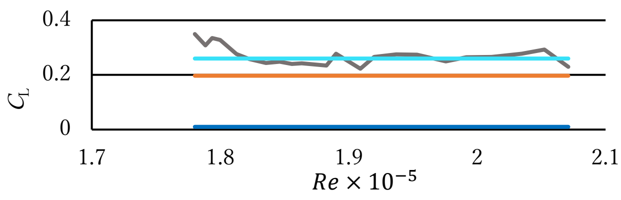

図 6　軌道 No. 3 の揚力係数 C_L

4.3 距離関数の無次元化

軌道データは測定誤差を含んでおり，距離関数の最小値は測定誤差の大きい軌道ほど大きくなる．つまり，すべての軌道データに対して同じ閾値を用いて推定する場合，その最小値に対する閾値の割合が異なる．ここでは，この問題を解決するために距離関数の無次元化を行う．

距離関数 d^2とその最小値$(d_{min})^2$の関係は式(4)で表される．

$$d^2 = \sum_t \left(\left(x(t) - x_d(t) \right)^2 + \left(z(t) - z_d(t) \right)^2 \right) \geq (d_{min})^2 \quad (4)$$

これを次式のように変形すると，無次元化した距離関数$(d^*)^2$が得られる．

$$(d^*)^2 = \sum_t \left(\left(\frac{x(t)}{d_{min}} - \frac{x_d(t)}{d_{min}} \right)^2 + \left(\frac{z(t)}{d_{min}} - \frac{z_d(t)}{d_{min}} \right)^2 \right) \geq 1 \quad (5)$$

RS 法において距離関数を式(5)に変更し推定する．軌道データの誤差は最小二乗法で 3 次式近似して得られた残差を使用する．サンプリングサイズを 1000，閾値ε^*を 300 として推定した結果を表 1 に示す．表中のΔC_DとΔC_Lはそれぞれの最大値と最小値の差である．

表 1　空力係数の推定結果(無次元距離)

軌道	ΔC_D	ΔC_L	残差
No. 1	0.138	0.135	0.016647
No. 2	0.169	0.140	0.013044
No. 3	0.122	0.114	0.006658
No. 4	0.323	0.287	0.039493
No. 8	0.058	0.056	0.003065
No. 10	0.238	0.207	0.018484
No. 11	0.225	0.204	0.020990
No. 14	0.289	0.259	0.023242
No. 17	0.231	0.202	0.024832
No. 19	0.106	0.101	0.004642
No. 20	0.183	0.166	0.013333

一般に，残差の小さい軌道ほど高精度に推定可能である．無次元の距離関数を用いない RS 法では，4.1 節で述べたように同じ閾値で推定すると推定値の幅に大きな差がなかった．しかし，距離関数を無次元化することによって，残差の小さい軌道ほど推定値のばらつきが少なく高精度に推定できた．しかし，この方法で得られた結果は分布が異なるためそれらを相互に比較するための基準を検討する必要がある．

5 まとめと今後の課題

本研究では，飛翔中のサッカーボールの軌道データから ABC 法を用いて空力係数を推定し，推定に用いる初速度の最適な計算式と閾値の決定方法について調べた．

初速度の計算式を変更して推定した結果，抵抗係数 C_Dは軌道データ全体を最小二乗法で 3 次式近似し，その時間微分を初速度とする方法が最も有効であった．揚力係数C_Lは，どの計算式も補間法の結果と異なる軌道データが存在したため，正確な計算式は結論できなかった．

軌道データの測定誤差から閾値を決定するために，距離関数の無次元化を行った．無次元化していない距離関数を用いた RS 法では推定値の幅が近くなったが，距離関数を無次元化すると，同じ閾値で推定しても残差の小さい軌道データは推定値の幅が狭くなり推定精度が向上した．

今後は， ABC 法で空力係数の時間変化を考慮して推定する方法を考える必要がある．

参考文献

[1] Ed Regis: Scientific American (online), (2020).

[2] 渡辺卓馬: 軌道に基づく空力係数推定法における誤差解析，茨城大学大学院理工学研究科知能システム工学専攻修士学位論文(2017).

[3] 石塚雅人他: 日本機械学会 シンポジウム:スポーツ工学・ヒューマンダイナミクス 2020, (2020).

[4] 安田海人他: 日本機械学会論文集，Vol.80，No.814，(2014) pp. 1-10.

[5] Toni. T et al: Journal of the Royal Society Interface, 6 (2009) pp.187–202.

[6] 荒木田祐希: 飛翔中のサッカーボールに働く流体力，茨城大学工学部知能システム卒業論文(2015).