遺伝的アルゴリズムを応用した偏微分方程式の数値解法

An Application of Genetic Algorithm to Numerical Solution of Partial Differential Equation

発表者：青木　悠介　　指導教員：坪井　一洋

Abstract：The purpose of this study is to develop a new numerical solution of partial differential equation based on Genetic Algorithm(GA). We attempt to calculate a inviscid Burgers equation that is one of typical nonlinear partial differential equations. When we calculate this equation by finite differencial method, numerical oscillation occurs. Then we attempt to overcome this difficult by GA. From the present study, we confirm that this new method of GA can calculate a inviscid Burgers equation successfully and obtain the correct numerical solution.

1. はじめに

工学分野で用いられる微分方程式は, 非線形性のある偏微分方程式であることが多い. 偏微分方程式の数値解法には様々な方法があるが, いずれの方法でも離散化を行うため，それに伴う誤差の発生が問題となる．特に非線形性の強い問題で生じる不連続な解を離散解法で扱うと, その解に重大な誤差が発生することが知られている．

GA には組み合わせ最適化問題に強いという性質がある[1]．本研究ではこの性質を利用し，偏微分方程式の解を数値の組み合わせとみなし，理想的な解の導出を目指す．

2. 非粘性 Burgers 方程式

2.1 衝撃波の挙動

GA を用いて解く非線形偏微分方程式として，今回は(1)式に示す非粘性 Burgers 方程式の数値計算を試みる．非粘性 Burgers 方程式は, 左辺の第 2 項に非線形項を含むため, 不連続な解をもつときがある．

しかし，解析的な解を構成できるため，解析的な解が構成できない方程式の近似解を得るためのスキームの適応性や，有効性を判断するのに最適な方程式である[2].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \qquad (1)$$

初期条件：$u_0 = \sin(x\pi)$.

GA を用いて計算する前に，まずは非粘性 Burgers 方程式の特性について説明する．特徴的なのは，(1)式の左辺第 2 項にある非線形の移流項である．この項は流速 u の流れ場における加速度を表している[2]．ここでは加速度が一定ではないため, 波形の場所ごとに流速が違うという性質を必然的にもっている．

具体的な波の性質について述べる．図 1 に示す点 A(x=1/2)にある解が Δt 秒後にどのように変化するかを見ると, 初期時刻において波形が sin($x\pi$)なので, 点 A は u=1.0 の値をもっている．したがって，Δt 秒後に点 A は点 A'(x=1/2+1.0×Δt)に移動する．

同様にして点 B も移動するが，点 A に比べて流速が遅いため，ある時刻において点 A が点 B に追いついてしまう．つまり，流速の大きい点が早く進み，流速の小さい点は遅く進むのである．そして，波が追いつく時刻に x=1.0 付近で解に不連続が生じる．これが非粘性 Burgers 方程式における衝撃波(shock wave)の形成である．この方程式を数値的に解くということは, 衝撃波を数値計算によって再現することである．

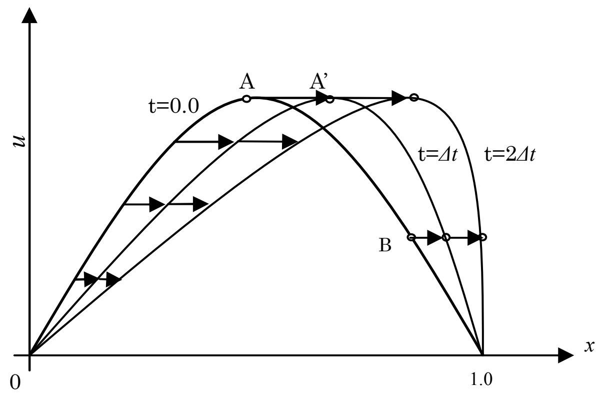

図 1. 衝撃波の形成

2.2 差分近似による計算

非粘性 Burgers 方程式を，(2)式に示す中心差分で解いたときの計算結果を図 2 に示す．(2)式に含まれる Δt と Δx はそれぞれ時間刻み幅と x 軸刻み幅である. 図 2 を見ると x=1.0 の付近で u の値の急な変化が見られる．つまり，非

粘性 Burgers 方程式の特徴である解の不連続が現れている．さらに，時間が進むにつれ波が次第に増幅し，中心差分近似では正しい解が再現されない．

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{u_i^n}{2}\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}. \qquad (2)$$

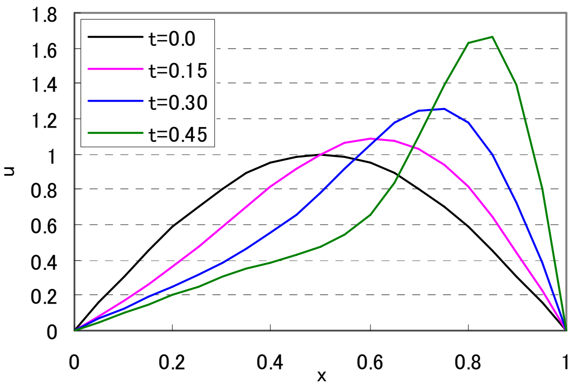

図 2. 中心差分による計算結果($\varDelta t$=0.15, $\varDelta x$=0.05)

3. 評価関数の作成

GA を用いて計算をするためには，評価関数が必要になる．ここでは評価関数の導出について述べる．

(1)式に示す非粘性 Burgers 方程式の解は，$x-ut$ を変数とする滑らかな任意関数 f によって(3)式と表せる[2,3]．

$$u(x,t)=f(x-ut). \qquad (3)$$

そして，任意関数 f が初期波形 u_0 であるとき，解は(4)式になる．

$$u_0=u(x,0)=\sin(x\pi)$$
$$u(x,t)=\sin(x-ut)\pi. \qquad (4)$$

この式を用いて(5)式で評価関数 z を定義し，この式に含まれる u_i^n を GA によって導き出す．この評価関数を含む GA を用いて非粘性 Burgers 方程式の数値計算を試みる．評価関数 z の値が 0 に近ければ解の精度が良い．

$$z=\sum_{i=0}^{N}\left|u_i^n-\sin(x-u_i^n t)\pi\right|. \qquad (5)$$

4. GA による計算結果

計算時の条件を表 1 にまとめる．そして，計算によって得られた解を図 3 に示す．図 3 は時刻ごとの衝撃波の挙動を示した図である．この図を見ると，時間が進むにつれて図 1 と同様に x 軸方向に波が変形し，u の最大値が u=1.0 を維持したまま衝撃波を形成した．つまり，得られた解には 2.1 で説明した非粘性 Burgers 方程式の特徴がうまく再現されている．

また，評価関数 z の値を調べると，どの時刻においても 10^{-3} 前後の値になった．したがって，誤差の小さい数値解も得られた．

表 1. 計算条件

刻み点(N)	21
初期条件 $u(x,0)$	$\sin(x\pi)$
x 軸刻み幅($\varDelta x$)	0.05
時間刻み幅($\varDelta t$)	0.15
突然変異確率	0.1
解集団の大きさ	500
GA 計算の世代数	5000

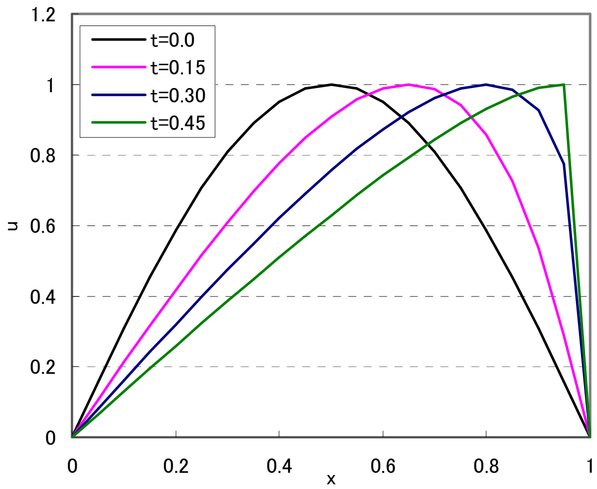

図 3. GA による計算結果

5. まとめ

本研究の目的は遺伝的アルゴリズム(GA)に基づいて，偏微分方程式の新しい数値解法を開発することである．今回は，典型的な非線形偏微分方程式である非粘性 Burgers 方程式の計算を行った．この方程式を差分法で計算すると数値的な振動が発生する．ここでは，この方程式の解法に GA を適用することで，正しい不連続解(衝撃波)を求めることができた．

参考文献

[1] 北野宏明：『遺伝的アルゴリズム』産業図書 (1993)
[2] 登坂宣好，大西和榮：『偏微分方程式の数値シミュレーション』東京大学出版会 (1991)
[3] 及川正行：『偏微分方程式』岩波書店 (1997)