

回転を伴う熱対流の3次元シミュレーション

3-D Flow Simulation on Thermal Convection with Rotation

We perform three-dimensional simulation on thermal convection. The effect of rotation to the generation of plume is, in particular investigated in the present study. Brief consideration on the computational results is also presented.

1. はじめに

温度差に伴う浮力の効果によって発生する熱対流は、レイリー数と呼ばれる無次元パラメータに依存することが知られている。実際、レイリー数がある値より小さい時に対流は起こらず熱伝導のみで熱が伝わる。一方、レイリー数がある値以上だと定常的な対流が発生し、それによって熱が伝えられる[1]。

しかしながら、回転作用を伴う熱対流についてはほとんどわかっていない。そのような熱対流としては、大規模な例としては台風の発生があげられる。あるいは、より規模が小さな例としては竜巻や火災旋風、ヒートアイランド現象などが挙げられるだろう。したがって、熱対流における回転の影響を調べることは上にあげた例からわかるように、自然災害や環境問題に対して基礎的な知識を与えることができる。

本研究では、簡単な3次元モデルを考え、回転の強さが熱対流にどのような影響を及ぼすかを数値シミュレーションによって調べることを目的とする。

2. 基礎方程式と差分化

2.1 基礎方程式

ここでは本研究で用いた基礎方程式系である Navier Stokes 方程式(以下、N-S方程式)、連続の式、エネルギーの式を示す[2]。基礎方程式系において、熱の影響は Boussinesq 近似を用いた[3]。これにより密度変化は運動方程式の浮力効果のみに限定でき、流れとしては非圧縮性を仮定できる。また、連続の式に圧力の時間微分項を加えた擬似圧縮法を用いた。

・N-S方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Ta^{1/2} \times Pr^{1/2}}{Ra^{1/2}} v \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ta^{1/2} \times Pr^{1/2}}{Ra^{1/2}} u \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - T \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

・連続の式

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

・エネルギーの式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \\ = \frac{Pr^{1/2}}{Ra^{1/2} \times Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 u 、 v 、 w をそれぞれ x 、 y 、 z 方向の流速、 p は圧力、 T は温度の微小擾乱である。

基礎方程式系は代表流速 $U = \sqrt{g\beta\Delta TL}$ 、代表長さ L 、代表温度差(領域内の高温部と低温部の差) ΔT を用いて無次元化されている。ここで、 g は重力加速度、 β は体膨張係数である。

また、無次元化された基礎方程式系には以下の3つの無次元パラメータが含まれる。

$$Ta = 4\Omega^2 L^4 / \nu^2 \quad (6.a)$$

$$Ra = g\beta\Delta TL^3 / \nu\kappa \quad (6.b)$$

$$Pr = \nu / \kappa \quad (6.c)$$

ここで、 Ω は回転角速度、 ν は動粘性係数、 κ は温度伝導率(熱拡散率)ある。

式(6.a)で与えられる Ta はテイラー数と呼ばれ、回転流体を取り扱う際に必要な無次元数で、回転系における粘性作用の大きさを表す[4]。式(6.b)で与えられる Ra はレイリー数と呼ばれ、対流の臨界状態を決定する定数である[4]。また、式(6.c)で与えられる Pr はプラントル数と呼ばれ、熱・物質移動に関する現象を取り扱う上で重要な無次元数である[4]。

2.2 差分化

差分法は基本的かつ重要な数値解法で、流れ場の問題には最も多く用いられている[5]。差分法の中でも基礎方程

式系(1)~(5)をオイラー前進差分法で解く[5]。空間微分項については2次精度の中心差分,時間微分項については1次精度の前進差分を用いて離散化する。

離散化の際,物理量の定義点異なるスタガードメッシュを用いる。今回用いるスタガードメッシュは立方体を1つの格子セルとし,それぞれの面の中心に流速,立方体の中心に圧力と温度を定義する。

3. 計算モデルと計算条件

計算モデルとして2枚の平行平板で囲まれた領域を考える。その底面の中心付近に熱源を置いた場合の3次元対流シミュレーションを行う。初期条件として,領域内の流体が,静止している状態を考える。また,境界条件は上下壁面ですべり無し,それ以外の面は,開放条件とする。

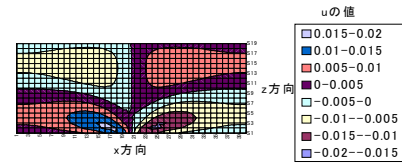
このような条件のもと,時間が進むにつれて,熱源と周囲の温度差による浮力の効果で上昇気流が発生し対流が起こる過程を再現する。格子数を $40 \times 40 \times 20$ で等間隔,時間刻み幅を0.001,時間ステップ数を 5×10^5 とする。また無次元数はPrを1.0に固定し, Ra を $10^4, 10^5$, Ta を $1.0, 10^2, 10^4$ と変えてシミュレーションする。

4. 結果と考察

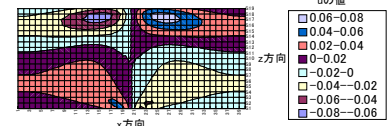
以下に示す結果は,熱源を含む中心断面で見た u, w, T の結果である。ここでは $Ta=100$ とし, Ra の違いによる流れの変化をFig. 1からFig. 3に示す。それぞれの図において流速 u (Fig. 1),流速 w (Fig. 2),温度 T (Fig. 3)の Ra による影響を比較した。

結果から,流速 u と w については $Ra=10^4$ に比べて, $Ra=10^5$ の場合にそれぞれの最大値が4倍程度大きいことがわかる。 $Ra=10^5$ の流速 u では上面近くに流速の大きい分布が現れている。また,流速 w についても $Ra=10^5$ では最大流速が生じる場所が $Ra=10^4$ に比べて高い位置になっている。これらの結果は,ブルームの発生により説明できる。

温度分布に着目すると, $Ra=10^4$ のときにブルームが発生しなかったのに対して, $Ra=10^5$ のときは明らかに発生していることがわかる。このことから, Ra が 10^4 から 10^5 の間にブルームが発生する臨界値が存在すると思われる。

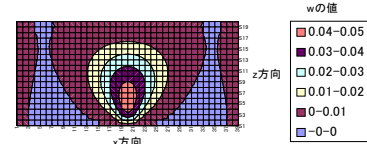


(a) $Ra=10000$

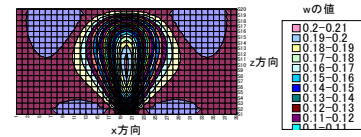


(b) $Ra=100000$

Fig. 1 流速 u の分布($Ta=100$)

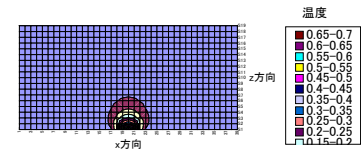


(a) $Ra=10000$

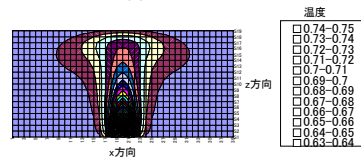


(b) $Ra=100000$

Fig. 2 流速 w の分布($Ta=100$)



(a) $Ra=10000$



(b) $Ra=100000$

Fig. 3 温度分布($Ta=100$)

5. まとめと今後の課題

対流発生における回転の影響を調べるために,3次元N-S方程式に基づいた基礎方程式系をまとめた。さらに,簡単な計算モデルに基づいたシミュレーションを行い,計算結果について考察した。その結果,対流ブルームが発生する臨界 Ra が存在することがわかった。

今後は計算で求めた流れ場について,より詳細な検討を行い,臨界 Ra と Ta の関係を調べたい。

参考文献

- [1] 計算流体力学のメモ: <http://www.sol.dti.ne.jp/~k-yasu/flow/flow3d>
- [2] 対流の基礎方程式系: <http://www.sit.ac.jp/user/Satoh/paper/98a.Satoh/>
- [3] ブシネスク近似: <http://dennou-k.kugi.kyoto-u.ac.jp/arch/gfdsemi/1998-08-20/kagi-1/003.html>
- [4] Ta, Ra, Pr について: <http://www.mh.sd.keio.ac.jp/~nozaki/neturyutai/number>
- [5] 日本機械学会 編:流れの数値シミュレーション,コロナ社, p.56, p.64, pp. 79-80