角度に依存する初速度をもつ放物体の最適初速角

Optimum Angle of Projectile with Initial Velocity depending on Angle

発表者：木村 孝裕　　指導教員：坪井 一洋

1 はじめに

空気中を移動する物体に働く力が重力と空気抵抗のみとすれば，物体の運動はそれらを含んだ運動方程式で表すことができる．このとき斜方投射された物体の軌跡は放物線を描くため，一定の初速度に対して飛距離が最大となる最適な初速角が存在する．

放物運動の最適初速角が 45°になるのは周知のとおりである．これは投射点と着地点に高低差がなく，空気抵抗を無視した場合である．しかし，多くのスポーツ競技においてはこれよりも低い角度が使われている[1][2]．その理由として助走の効果が考えられる．それは，助走の効果によって初速度と初速角は独立ではなくなるためである．

この効果を踏まえた最適初速角を検証するために投射時のモデルとして 3 変数モデル[3]を使用した．このモデルは助走の効果を含んだ最も簡単な投射モデルの一つであり，モデルから初速度と初速角の関係式を導くことができる．これにより放物体の最適初速角の一般解を求めることが目的である．

2 投射モデル

2.1 助走の効果を含む投射モデル

助走の効果を含んだ最も簡単な投射モデルである 3 変数モデルを考える．このモデルでは一定速度 V で水平に移動する台車から速度 w，角度 ψ で投射体が投射される．

このモデルに対する速度図を図 1 に示す．速度 V と w の合成によって投射体は初速度 $\mathbf{q}$ ＝（u_i,v_i）をもつ．このとき，以下の関係式を導くことできる．

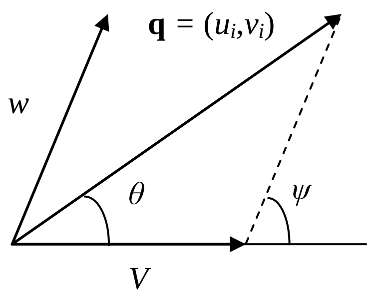

図 1　投射モデルの速度図

$$\begin{cases} u_i = q\cos\theta \\ v_i = q\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

$$\tan\theta = \frac{v_i}{u_i} \tag{2}$$

$$q^2 = u_i^2 + v_i^2 \tag{3}$$

2.2 初速度関数の導出

初速度 q と水平速度 V，投射速度 w が作る三角形に余弦定理を適用し，初速度 q について整理すれば q に対する次の 2 次方程式が得られる．

$$q^2 - 2(V\cos\theta)q - \left(w^2 - V^2\right) = 0 \tag{4}$$

方程式(4)の解より初速度 q は初速角 θ の関数として以下のように導出される．

$$q(\theta) = \begin{cases} q^+(\theta) = V\left\{\cos\theta + \sqrt{\left(\frac{w}{V}\right)^2 - \sin^2\theta}\right\} & (5) \\ q^-(\theta) = V\left\{\cos\theta - \sqrt{\left(\frac{w}{V}\right)^2 - \sin^2\theta}\right\} & (6) \end{cases}$$

このとき，初速度 q が実数となるためには以下の条件が必要となる．

$$\left(\frac{w}{V}\right)^2 - \sin^2\theta \geq 0 \tag{7}$$

式(7)の条件により w/V によって初速度 q の定義域が異なる．実際，$1 \leqq w/V$ の場合，初速角は $0° \leqq \theta \leqq 90°$の範囲をとることができる．一方，$0 \leqq w/V \leqq 1$ の場合には初速角 θ は式(8)に示す最大値 θ_{max} が存在して，これより大きい値をとることはできない．

$$\theta_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{w}{V}\right) \tag{8}$$

3 最適初速角の導出

3.1 最適初速角の条件

投射点と着地点に高低差がなく，かつ空気抵抗を無視した放物運動を考えた場合には，飛距離は以下の式で与えられる．

$$X = \frac{2u_i v_i}{g} \tag{9}$$

式(9)に式(1)の初速度を代入すると，飛距離 X は以下の式で表される．

$$X = \frac{1}{g}q^2 \sin 2\theta \tag{10}$$

式(10)に対して q を θ の関数と考えると $dX/d\theta = 0$ より以下の式を導くことが出来る．

$$q' \sin 2\theta + q\cos 2\theta = 0 \tag{11}$$

これより以下の関係式が得られる．

$$\tan 2\theta = -\frac{q}{q'} \qquad (12)$$

式(12)は，初速度関数が減少関数であれば，この式を満たす正の初速角が存在することを示している．実際，走り幅跳びや砲丸投げで実測された初速度関数は角度に対して単調減少である[1][2]．

次に式(5)と式(6)より $q(\theta)$ の関数形状は w/V の値で決まる．代表的な w/V に対する $q^{+}(\theta), q^{-}(\theta)$ それぞれの形状を図2に示す．この図では $q^{+}(\theta)$ が実線，$q^{-}(\theta)$ は破線である．

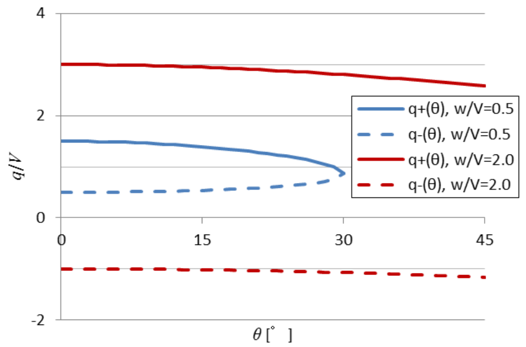

図2　初速度関数

まず $q^{-}(\theta)$を見ると $w/V = 2.0$ のときは全域で $q≦0$ となる．一方，$w/V = 0.5$ では上述した θ の範囲で $q≧0$ となるが，その関数は初速角に対して単調増加である．このことから $q^{-}(\theta)$は初速度関数として不適切である．

他方，$q^{+}(\theta)$の解は，$w/V = 2.0$ では全域で $q≧0$ であり，$w/V = 0.5$ では上述したように $0°≦\theta≦\theta_{max}$($= 30° = \sin^{-1}(0.5)$)の範囲で $q≧0$ となっている．そして $q^{+}(\theta)$ は，w/V の値によらず単調減少関数であることがわかる．したがって，以降では $q^{+}(\theta)$のみを考えることにする．

3.2 最適初速角の導出と検証

式(11)から2次方程式で表される最適初速角の関係式を導くことができる．

$$2w\sin^2\theta + V\sin\theta - w = 0 \qquad (13)$$

式(13)より最適初速角として

$$\theta_{opt} = \sin^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{V}{w}\right)\left\{-1+\sqrt{1+8\left(\frac{w}{V}\right)^2}\right\}\right] \qquad (14)$$

が求まる．式(14)より最適初速角は w と V の組み合わせにより決まることがわかる．図3に最適初速角と w/V の関係を示す．これより w/V が増加するにしたがって最適初速角が増加することが確認できる．したがって，助走の効果を表す水平速度 V が投射速度 w に対して小さくなるほど最適初速角が大きくなることがわかる．

助走の効果を表す水平速度Vと投射速度wをともに0～10[m/s]の範囲で与えて最適初速角 θ_{opt} を求めた結果を図4に示す．走り幅跳びの場合は，助走の効果が大きいために 18～25°の低い角度が最適角になる．また砲丸投げにおいては，助走速度が投射速度よりも小さくなるため最適角は 30～38°の高い角度になることがわかる．

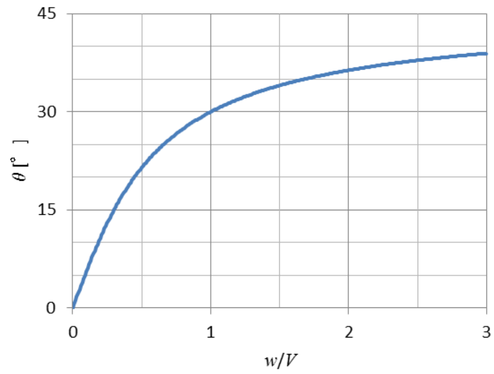

図3　最適初速角

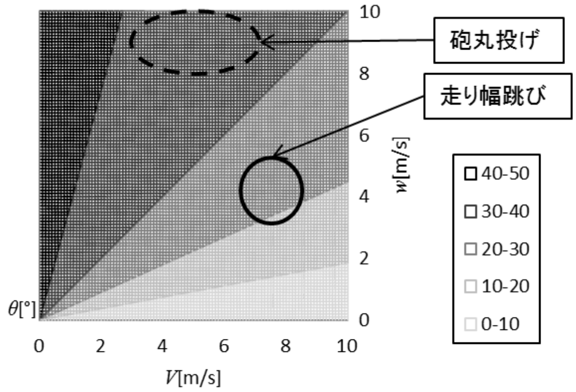

図4　最適初速角のパラメータ依存性

4 まとめ

本研究では，初速度が角度に依存する場合に飛距離を最大とする初速角について検証した．まず投射モデルから初速度を初速角の関数として表した．次に投射点と着地点に高低差のない場合の飛距離の式から最適初速角の条件と最適初速角に関する2次方程式を導いた．そして，この方程式の解を求め，最適初速角を導出した．その結果，助走の効果が大きくなるにつれて，助走で得られる水平方向の速度成分を生かすために最適な初速角が低くなることがわかった．

参考文献

[1]N.P.Linthorne: Optimum release angle in the shot put, Journal of Sports Sciences, Vol. 19, No. 5 (2001) pp. 359-372.

[2]N.P.Linthorne et al.: Optimum take-off angle in the long jump, Journal of Sports Sciences, Vol. 23, No. 7 (2005) pp. 703-712.

[3]宮田和茂：スポーツの投射における 3 変数モデルの変数推定，平成 24 年度茨城大学工学部知能システム工学科卒業研究論文.