

スポーツの投射における3変数モデルの変数推定

Variable Estimation of a Projection Model with Three Variables in Sports

発表者：宮田 和茂

指導教員：坪井 一洋

1 はじめに

空気抵抗が働かない投射体の最大投射角は 45° であるが、多くのスポーツ競技では、これより小さい角度が使われている。その理由の一つが助走の効果であり、実際に助走の効果を含んだ投射モデル（以下、3変数モデルと呼ぶ）によって最適な投射角が理論的に導出されている^[1]。

しかし、3変数モデルに含まれる変数の物理的意味は十分にわかっておらず、そのため変数の値を直接測定することができない。そこで既存の実測データなどからこれらの変数値を推定することになる。

実測による初速度データを用いて、初速度と初速角の関係（初速度関数と呼ぶ）を推定した結果、得られた初速度関数では特に初速角が小さいところで実測データとの不一致が見られた^[1]。

そこで本研究では、従来の推定方法とは異なる推定方法を提案し、3変数モデルの変数推定を行った。また、実測による初速度関数に用いられている変数（以下、2変数モデルの変数と呼ぶ）と、3変数モデルに用いられている変数の関係についても調べた。

2 3変数投射モデル

3変数投射モデルとは助走の効果を含んだ最も簡単な投射モデルである。このモデルでは一定速度 V で水平に移動する台車から角度 ψ 、速度 w で投射体が投射される。

このモデルに対する速度図を図1に示す（図1で q と θ のみを考えたものが2変数モデルとなる）。そして V と w の合成によって投射体は初速度 $q=(u_i, v_i)$ をもつ。このとき、次式の関係がある。

$$u_i = w \cos \psi + V, \quad v_i = w \sin \psi \quad (1)$$

図1の速度図において q 、 V および w がつくる速度の三角形に余弦定理を用いると、次の初速度関数が得られる。これが3変数モデルの初速度関数 q^+ である。

$$q^+(\theta) = V \left(\cos \theta + \sqrt{\left(\frac{w}{V}\right)^2 - \sin^2 \theta} \right) \quad (2)$$

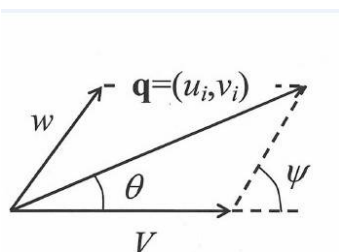


図1 3変数投射モデルの速度図

3 変数の推定法

3変数モデルには V と w および ψ からなる3個の変数が含まれているが、実測では初速度ベクトル $q=(u_i, v_i)$ が測定される。そのため、実測データだけではこれら3個の変数を特定することができない。

初速度関数 $q^+(\theta)$ はモデル変数 V と w の値によって、その形状が変化する。したがって、実測から得られた初速度関数の形状に最も近い関数 $q^+(\theta)$ を与える変数値を求めれば、それがこれらの値と考えることができる。

関数形状を評価する指標として、式(3)に示す実測による初速度関数 $q^{t\text{arge}}(\theta)$ と $q^+(\theta)$ の面積差を用いる。すなわち、関数間の面積差が最小となるとき、これらの関数形状が最も近いとみなす。

$$\Delta S = \int_0^{\theta_{\max}} |q^{t\text{arge}}(\theta) - q^+(\theta)| d\theta / \int_0^{\theta_{\max}} |q^{t\text{arge}}(\theta)| d\theta \quad (3)$$

以前の方法では、3変数モデルの変数を変化させる際、式(1)から ψ を消去した関係式を拘束条件とすることで変数の数を減らす方法を用いたが、今回は w と V の値をともに変化させることで ΔS が最小となる組み合わせを探索する。

4 砲丸投げデータによる検証

4.1 実測による初速度関数

砲丸投射時の初速度関数として以下の関係式が提案されている^[2]。

$$q^{t\text{arge}}(\theta) = q^{sp}(\theta) = \sqrt{\frac{2(F_0 - a\theta)l}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{F_0 - a\theta}\right)^2 \sin^2(90^\circ + \theta)} - 2gl \sin \theta + V^2} \quad (4)$$

ここで、 m は砲丸の質量、 l は砲丸の加速経路長、 V' は投射段階に入る瞬間の速度であり、それぞれ $m = 7.26 \text{ kg}$ 、 $l = 1.65 \text{ m}$ 、 $V' = 2.5 \text{ m/s}$ である。また、式中の $F_0 - a\theta$ は力の関係式で、 F_0 は $\theta = 0^\circ$ での力、 a は力の減少率を表し、ともに選手に固有の定数となる。

4.2 変数値の推定

まず w と V の値をそれぞれ変化させたところ、最適な組み合わせの結果は、 $V = 14.0 \text{ m/s}$ 、 $w = 0.5 \text{ m/s}$ となった。しかし実際の砲丸投げの競技において 14 m/s で助走することは不可能であり、しかも初速度関数は 0° 付近でしか定義されない。したがって、実現可能な範囲（ w と V はそれぞれ $0 \sim 10 \text{ m/s}$ ）で、面積誤差 ΔS が最小（ $\Delta S = 0.0248$ ）となる $V = 4.8 \text{ m/s}$ 、 $w = 8.7 \text{ m/s}$ を今回の推定結果と考えた（図2に●として示す）。

このときの誤差の等値線を図2に示す。従来の方法での最適な組み合わせは $V = 4.4 \text{ m/s}$ 、 $w = 8.6 \text{ m/s}$ となり、 ΔS は 0.0292 であった。

最適な組み合わせに対する初速度関数 $q^+(\theta)$ を図3に示す。同図には対応する $q^s p(\theta)$ も示している。また、以前の方法で求めた最適な V と w の値による $q^+(\theta)$ も図3に示した。この図から、特に初速角が $20\sim 50^\circ$ の範囲で今回の結果の方が従来の方法より $q^s p(\theta)$ に近いことが分かる。

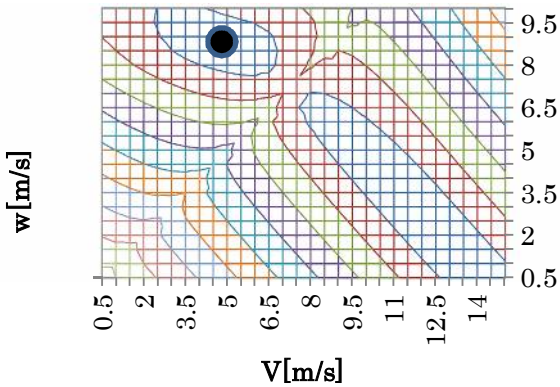


図2 誤差 ΔS の等値線

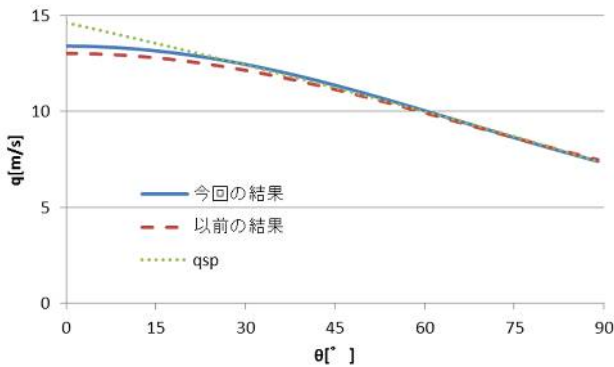


図3 初速度関数の比較 ($q=11.9$ m/s, $\theta=34.1^\circ$)

5 モデル変数の関係

2変数モデル $q^s p(\theta)$ では F_0 と a , 3変数モデルは w と V の値によって初速度関数の形状が変化する。そこで (F_0, a) と (w, V) の関係を調べる。

2変数モデルの F_0 と a は選手が砲丸を投げるときに力に関係する変数なので、3変数モデルの w と強い関連があると思われる。一方、3変数モデルの V は、助走の効果を表しているため F_0 と a に関連するとは考えにくい。

本研究で提案した変数の推定法を用いて求めた F_0 と a に対する w の値を図4に、 V の値を表2に示す(V の値は図ではわかりにくいため表にした。)

図4を見ると F_0 が大きくなると w の値も大きくなり、 a が大きくなると w の値が小さくなるのがわかる。しかし表2を見ると、 F_0 と a が変化した際の V の変化に規則性を見いだすことはできない。

そこでバックプロパゲーション法を用いて、 (F_0, a) と (w, V) の関係を調べた。図4と表2の結果から F_0 と a を入力、 w と V をそれぞれ出力として学習を行った。

入力を F_0 と a , 出力 w としたときにはユニットが1つの1層の中間層という簡単なモデルで正しく学習を行うことができた。しかし、出力が V の場合はこのような簡単なモデルでは正しく学習をすることができず、ユニット数が10個以上の複雑なモデルにしなければ学習ができなかった。

このことから上述したとおり、 (F_0, a) と w の関連は強いが V とはそれほど関連がないことが確認できる。

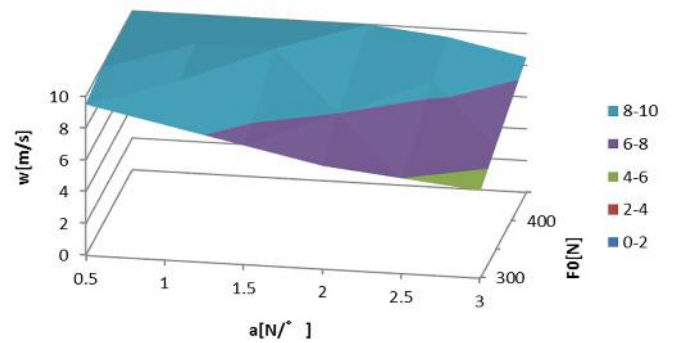


図4 $w(F_0, a)$

表2 $V(F_0, a)$

$a \setminus F_0$	300	350	400	450
1	2.5	2.5	3	4
2	4.5	4	3.5	3
3	5	5	5	5

6 まとめと今後の課題

本研究では助走の効果を含む3変数モデルの変数推定を行った。従来の推定法で得られた初速度関数では初速角が 30° 付近で実測データとの差が大きくなる。そこで今回は2つのモデル変数とともに変化させる方法を用いて最適な組み合わせを探索した。砲丸投げのデータで検証した結果、今回用いた方法で得られた初速度関数は $20\sim 50^\circ$ の範囲で実測データとよく一致した。

次に2変数モデルと3変数モデルの変数間の関係を調べた。その結果 (F_0, a) と w の間には対応関係が見られたが、 V の間には明確な関係は見い出せなかった。このことは F_0 と a が助走の効果に直接関係していないことから予想できる結果である。

今後は、他の競技データを用いた検証例を増やすとともに、モデル変数の持つ意味をさらに明らかにしていく必要がある。

参考文献

- [1] 坪井一洋, 小長谷康明, 助走の効果を含む投射モデルのスポーツ競技への応用, 日本機械学会論文集(C編), Vol. 77, No. 782(2011), pp 3750-3760.
- [2] Linthorne, N. P., Optimum release angle in the shot put, Journal of Sports Sciences, Vol. 19, No5 (2001), pp. 359-372.