

軌道データを用いた空力係数推定法の改良

Improvement of aerodynamic coefficients estimation method using trajectory data

発表者：荻野 尚哉

指導教員：坪井 一洋

1 はじめに

飛翔中のボールには空気抵抗が働いている。サッカーやバレーボールなどのスポーツにおいてもボールの空力特性は軌道に大きな影響を与えている。一般的にボールの空力係数に関する研究の多くは風洞実験で行われている。風洞実験は定常流を発生させて空力係数を測定するため、決められた条件下でしか測定できない。つまり時々刻々と気流が変化するボールの飛翔条件と一致するとは限らない。

そこで、風洞実験と異なる測定方法として、最近では、飛翔中のボールの軌道データから空力係数を推定する研究が行われている^[1]。本研究では推定精度向上のために空力係数の評価点を増加させることで、従来の方法の改良を試みた。また軌道データはサッカーボールの軌道を用いた。

2 運動方程式

鉛直上向きを z 軸、ボールの初速度が $x-z$ 平面に含まれるように x 軸を定義する。以下ではボールはこの2次元平面内で運動すると仮定する。

ボールに速度の2乗に比例する抵抗と揚力が働くとき、ボールの重心の運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{du}{dt} = -kqu - lqw \quad (1)$$

$$m \frac{dw}{dt} = -kqw + lqu - mg \quad (2)$$

ここで (x, z) は重心のベクトル、 (u, w) は速度ベクトル、 $q(= \sqrt{u^2 + w^2})$ は速度の大きさ、 m は質量、 g は重力加速度である。

さらに(1)式と(2)式の k および l は抵抗と揚力の比例定数であり、次式で示す。

$$k = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_D \quad (3)$$

$$l = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi}{4} d^2 C_L \quad (4)$$

ただし、 d はボールの直径、 ρ は空気密度、 C_D と C_L は無次元の抵抗係数と揚力係数である。

ここで(1)式の両辺に u 、(2)式の両辺に w をかけて差をとると、抵抗 k について(5)式の関係式が導かれる^[2]。

$$k = -\frac{m}{q^3} \left(u \frac{du}{dt} + w \frac{dw}{dt} + gw \right) \quad (5)$$

また(1)の式の両辺に w 、(2)式の両辺に u をかけてまとめると、揚力 l について(6)式の関係式が導かれる^[2]。

$$l = \frac{m}{q^3} \left(u \frac{dw}{dt} - w \frac{du}{dt} + gu \right) \quad (6)$$

3 最小二乗法

従来の方法はボールの位置データを時間の3次関数で近似して、補間するとき用いた区間内の中央点のみで空力係数を推定していた^[2]。ここでは従来法と呼ぶ。時刻 t_i における位置データ f_i がボールの軌道から与えられる。位置データを3次関数で近似した際に、区間内の中央点を推定する時刻 $t_0 = t_i$ が時間の原点になるように時間軸を平行移動した。このとき、 $\tau = t_i - t_0$ とにおいて、近似した3次関数は(7)式となる。

$$f_0(\tau) = \frac{1}{6} \ddot{f}_0 \tau^3 + \frac{1}{3} \dot{f}_0 \tau^2 + \dot{f}_0 \tau + f_0 \quad (7)$$

このとき、軌道データの近似を $2n + 1$ 個のデータで考える。 n は補間に用いるデータ数を表し、中央点を含む区間である。したがって、補間区間は(8)式となる。

$$t_{i-n} \leq \tau \leq t_{i+n} \quad (8)$$

また、(7)式の \ddot{f}_0 、 \dot{f}_0 、 f_0 、および f_0 は(8)式より求まる。

$$\begin{pmatrix} S_{ft^3} \\ S_{ft^2} \\ S_{ft} \\ S_f \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} S_6 & S_5 & S_4 & S_3 \\ S_5 & S_4 & S_3 & S_2 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \\ S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{f}_0 \\ 3\dot{f}_0 \\ 6f_0 \\ 6f_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで、(9)式における S_{ft^a} および S_b は $\tau_l = t_{i+j} - t_0$ とすると(10)式と(11)式となる。

$$S_{ft^a} = \sum_{j=-n}^n f_j \tau_j^a, \quad 0 \leq a \leq 3 \quad (10)$$

$$S_b = \sum_{j=-n}^n \tau_j^b, \quad 0 \leq b \leq 6 \quad (11)$$

本研究では推定精度の向上のためにデータ数を増加させる。そこで補間に用いた中央点を含む区間(8)式での位置データをそれぞれ(7)式に代入して、空力係数の推定を行った。

4 結果

軌道データはサッカーボールの軌道を用いて、撮影された 9 個の動画を数値化して使用した。いずれも補間間隔は $n = 10$ で推定を行った。

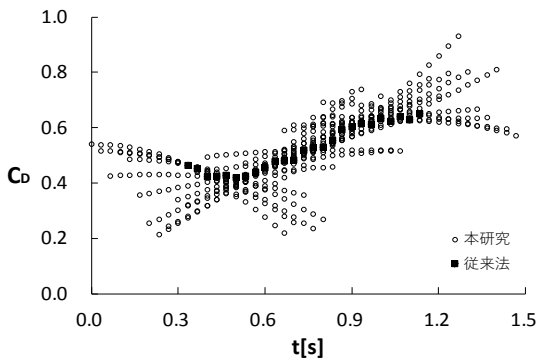


図 1 抵抗係数の比較(No.1)

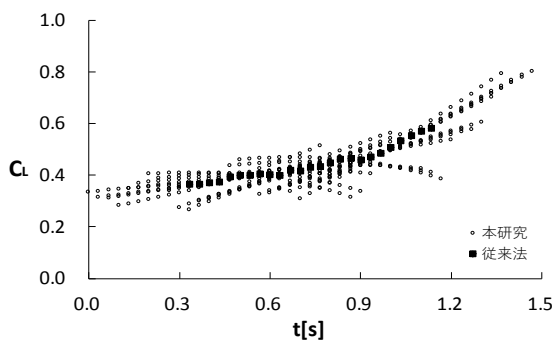


図 2 揚力係数の比較(No.1)

抵抗係数と揚力係数の時刻ごとの推定結果を図 1 と図 2 に示す。また軌道データの測定の時間間隔は $1/30$ s である。

今回は、従来法よりも推定するデータ点を拡張した。これにより、従来と比べて多くの空力データを得られた。また、時刻ごとに得られたレイノルズ数と抵抗係数、揚力係数を時刻ごとに平均値をとった。このときレイノルズ数 Re とは速度を無次元化したものであり、(12)式で定義される。ここで、 ν は動粘性係数で一般に $\nu = 1.512 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (20°C , 1 気圧) である。

$$Re = \frac{qd}{\nu} \quad (12)$$

図 3 と図 4 に 9 個の空力係数の推定結果をまとめた。図 3 と図 5 における WT は風洞実験の結果である^[3]。レイノルズ数が増加すると抵抗係数は減少していることがわかる。また抵抗係数では、2 つの傾向があった。レイノルズ数 $1.9 \sim 2.3 \times 10^5$ 付近の風洞実験と重なる傾向では抵抗係数が急激に変化するドラッグクライシスのような現象が起こっており、もう一方では抵抗係数が緩やかに変化している。

揚力係数はレイノルズ数が小さいときに変化が急激で、レイノルズ数が大きいときは変化が小さい。

図 3 でレイノルズ数 $1.9 \sim 2.3 \times 10^5$ 付近の抵抗係数が急激に変化している。No. 11 と No. 17, No. 19 の 3 つの軌道について従来法との抵抗係数の比較を図 5 に示す。これより従来法と比べて抵抗係数が急激に変化するドラッグクライシスのような現象がより顕著に見える。

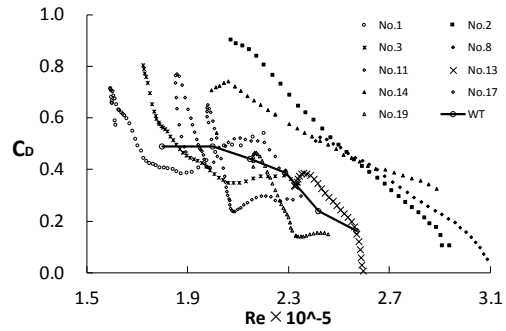


図 3 抵抗係数の推定結果(9 データ)

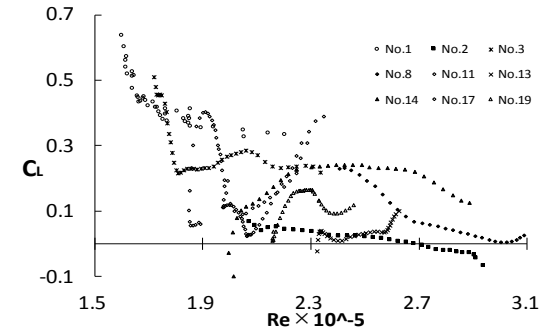


図 4 揚力係数の推定結果(9 データ)

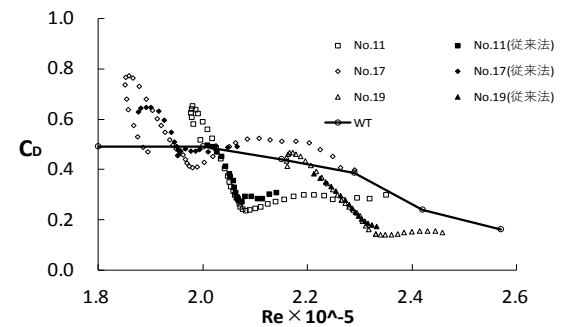


図 5 従来法との抵抗係数比較

5 まとめ

本研究では軌道データを用いて飛行中のサッカーボールに働く空力係数推定法の改良を行った。

従来の推定法では、軌道データを 3 次関数で近似し、その中央点でのみ空力係数を求めていたが、今回は 3 次関数の補間に用いたすべてのデータ点で空力係数を求めた。これにより、同じ軌道データに対して多くの空力データを得ることができた。今回は時刻ごとに平均することで各時刻でのレイノルズ数と抵抗係数、揚力係数を求めた。

その結果、抵抗係数では 2 つの傾向が見られた。1 つは抵抗係数が急激に変化するドラッグクライシスのような現象が起こり、もう一方では抵抗係数の変化が緩やかであった。特に、従来と比べて抵抗係数が急激に変化するドラッグクライシスのような現象がより顕著に見えた。一方、揚力係数ではレイノルズ数が大きくなるにつれて変化が緩やかであった。

参考文献

- [1] 渡辺卓馬, 荒木田祐希, 坪井一洋, 軌道情報を用いた飛行中のボールの空力係数推定, 日本機械学会 シンポジウム: スポーツ工学・ヒューマンダイナミクス, 2016
- [2] 荒木田祐希, 飛行中のサッカーボールに働く流体力, 茨城大学知能システム工学科卒業論文, 2015
- [3] 浅井武, 瀬尾和哉, 小林修, サッカーボールの空力特性に関する研究, 体育学研究, VOL52, No.1, 2007