

自由落下する球に働く抵抗の非定常特性

Unsteady characteristics of drag acting on a sphere in free falling

発表者： 関 尊 指導教員： 坪井 一洋

1 はじめに

一般的に、スポーツにおいて使用されるボールの空気抵抗は風洞実験により測定される。風洞実験では人工的に一定の空気の流れ(定常流)を発生させることで、ボールの空気抵抗が測定される。

しかし、実際に投射されたボールは加減速をしながら飛翔しており、周りの空気の流れが常に変化する(非定常流)。そのため、風洞実験とは条件が異なる。そこで、最近では投射されたボールの軌道から、時々刻々変化する抵抗係数を推定する研究が行われている^[1]。

本研究では、最も簡単な加速度運動である自由落下する球の位置データから抵抗係数を推定し、さらに、抵抗係数の非定常性と加速度ならびにジャーク(躍度)との関係について考える。

2 抵抗の評価式

ニュートンの抵抗法則における抵抗は、物体の速さの2乗に比例する。この抵抗を kmv^2 (k は定数)と表し、鉛直上向きを正とする。ここで、 m を球の質量、 v を速度、 g を重力加速度とすると、自由落下する球の運動方程式は(1)式のようになる^[2]。

$$m\dot{v} = kmv^2 - mg \quad (1)$$

流体の密度を ρ 、球の断面積を A 、無次元の抵抗係数を C_D とすると、球の抵抗は(2)式のようになる^[3]。

$$k = \frac{\rho AC_D}{2m} \quad (2)$$

したがって、(1)式と(2)式から C_D は(3)式となる。

$$C_D = \frac{2m(g + \dot{v})}{\rho Av^2} \quad (3)$$

さらに、(3)式を微分すると

$$\dot{C}_D = \frac{2mj}{\rho Av^2} - \frac{2\dot{v}C_D}{v} \quad (4)$$

となり、(3)式より抵抗係数の値は主に加速度に依存し、(4)式より抵抗係数の時間変化 \dot{C}_D はジャーク j に依存すると予想できる。

3 最小二乗法による補間

従来は球の位置データを時間の2次関数で近似することで抵抗係数を推定していた^[4]。しかし、今回はジャークを用いるため、3次以上の関数で近似する必要がある。

ここで、時刻 t_i における位置データ f_i が球の軌道から与えられる。位置データを近似する際に、空力係数を推定する時刻 $t_0 = t_i$ が時間の原点となるように時間軸

を局所的に平行移動する。このとき $\tau = t - t_0$ において、近似すると3次関数は(5)式のようにおくことができる。

$$f_0(\tau) = \frac{1}{6}\ddot{f}_0\tau^3 + \frac{1}{2}\dot{f}_0\tau^2 + \dot{f}_0\tau + f_0 \quad (5)$$

軌道データを近似するにあたり、 $2n + 1$ 個のデータの近似を考える。ただし、 n で補間に用いるデータ数を表す。したがって、 t_{i-n} から t_{i+n} の区間での補間となる。

(5)式の \ddot{f}_0 、 \dot{f}_0 、 f_0 および f_0 は(6)式より求まる。

$$\begin{pmatrix} S_{ft^3} \\ S_{ft^2} \\ S_{ft} \\ S_f \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} S_6 & S_5 & S_4 & S_3 \\ S_5 & S_4 & S_3 & S_2 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \\ S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{f}_0 \\ 3\dot{f}_0 \\ 6f_0 \\ 6f_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで、(6)式における S_{ft^p} および S_q は $\tau_l = t_{i+l} - t_0$ とすると(7)式と(8)式である。

$$S_{ft^p} = \sum_{l=-n}^n f_l \tau_l^p, \quad 0 \leq p \leq 3 \quad (7)$$

$$S_q = \sum_{l=-n}^n \tau_l^q, \quad 0 \leq q \leq 6 \quad (8)$$

4 卓球ボールの結果

卓球ボールの落下実験^[5]により得られた位置データから抵抗係数および加速度を推定した。その結果を図1に示す。ここで、 a は加速度である。また、抵抗係数の時間変化およびジャークの推定結果を図2に示す。いずれも $n=30$ で推定を行った。

図1および図2から抵抗係数と加速度、抵抗係数の時間変化とジャークの推定結果が連動していることがわかる。

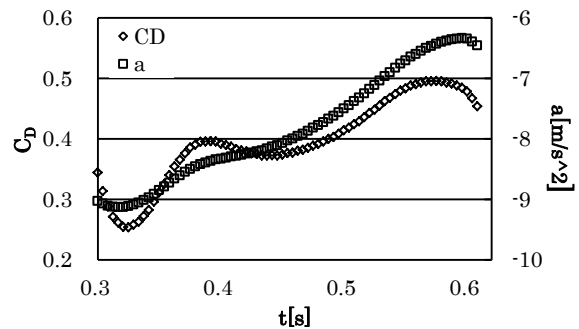


図1 C_D と加速度の推定結果

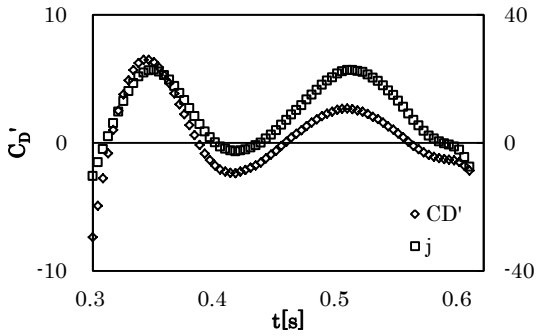


図2 C_D とジャークの推定結果

5 バレーボールの実験方法と結果

本研究では、公式バレーボールと非公式バレーボールの落下実験を行った。実験を行うにあたり、(1)式と(2)式を用いて、バレーボールの落下距離を評価した。その際 $C_D = 0.45$ 、 $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ とした。評価した結果、0.7 s間で約2.5 m落下することがわかった。よって本実験では2.5 m地点からボールを落下させる。

軌道の測定には市販のデジタルカメラを使用する。カメラの位置は、落下地点から6 m離れた場所で高さは1.25 mとした。撮影は240 fpsで行った。また、撮影動画からボールの位置座標を読み取るために市販のソフトウェア「PV Studio 2D」を用いた。

$n=30$ で推定した2種類のバレーボールの抵抗係数と加速度、抵抗係数の時間変化とジャークの結果を図3~6に示す。ただし、落下中の変化に注目するため、 $t \geq 0.3$ での推定結果のみを示す。

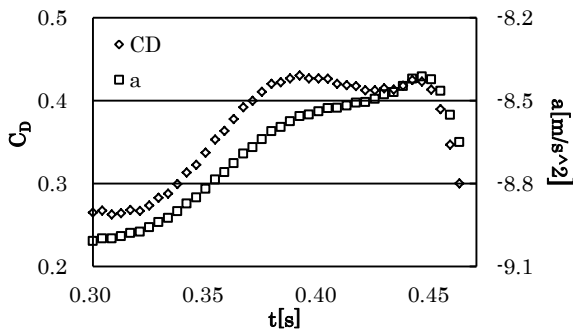


図3 公式ボールの C_D と加速度

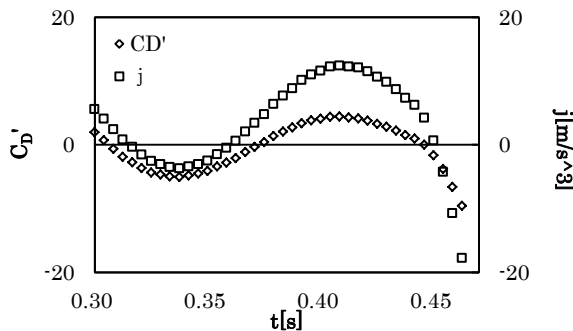


図4 公式ボールの C_D とジャーク

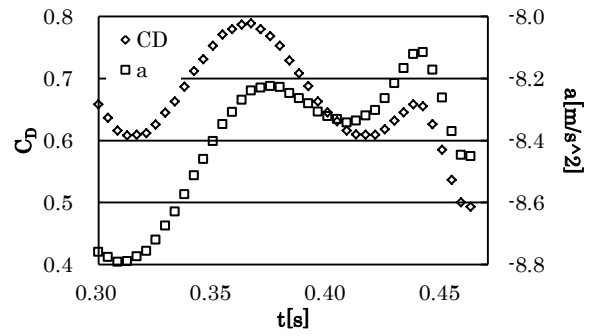


図5 非公式ボールの C_D と加速度

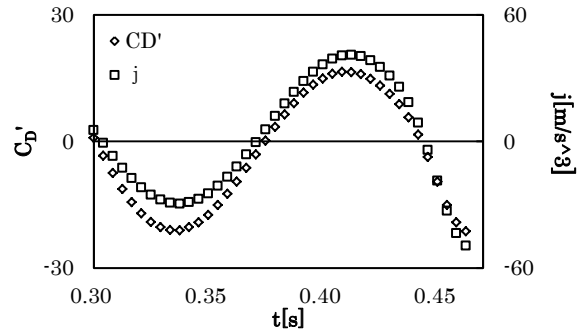


図6 非公式ボールの C_D とジャーク

図3~6より使用するボールが異なっても、抵抗係数と加速度、抵抗係数の時間変化とジャークの変動は対応している。特に、ジャークや加速度は周期的な変動をしている。これはボールの後方に渦が発生し、その渦が剥離を繰り返すことが原因と考えられる^[6]。

6 まとめ

本研究では自由落下する球に働く抵抗の非定常特性を調べた。自由落下する卓球ボールとバレーボールの軌道から抵抗係数と加速度、抵抗係数の時間変化とジャークの関係を明らかにするため、位置データを最小二乗法を用いて3次関数で補間することを考えた。

推定結果において、抵抗係数と加速度、抵抗係数の時間変化とジャークの変動は対応していることがわかった。つまり、加速度は抵抗係数、ジャークは抵抗係数の非定常特性と関係があることを確認した。

ジャークは常に変化しており、これは抵抗係数が一定でないことを意味する。さらに、用いたボールによらず、ジャークや加速度が周期的な変動をするのは、ボール後方で発生する渦の剥離の繰り返しが原因と予想できる。

参考文献

- [1] Kazuhiro Tsuboi and Kaito Yasuda: "Aerodynamic Coefficients Estimation based on Local Geometry of Ball Trajectory", Proceeding of IACSS 2014 Darwin Conference, 2014
- [2] 原島 鮮: 「力学 I」(裳華房 1978)
- [3] 加藤 宏: 「ポイントで学ぶ流れの力学」, (丸善, 2002)
- [4] 福島 正之: 軌道データを用いたボールの空力係数推定における補間法の比較(茨城大学知能システム工学科卒業論文, 2014)
- [5] 渡辺 卓馬: 自由落下する球に働く非定常流体力の解明(茨城大学知能システム工学科卒業論文, 2014)
- [6] L.Wakaba and S.Balachandar: Theor.Comput.Fluid Dyn.(2007) vol.21.: pp.147-153.