

# 回転するヤリの二点吊り法実験の力学的解析

## Dynamical analysis on bifilar suspension experiment of javelin in rotation

発表者：杉浦 郁斗

指導教員：坪井 一洋

### 1 はじめに

やり投げは陸上競技の投擲種目のひとつで投げたヤリの最大投擲距離を競う競技である。やり投げにおけるやりは、投擲種目の中で重量が最も軽く、その特異な形状から空気による流体力が強く影響する。

飛翔するやりに関する力学的研究はこれまでもいくつか報告されている[1]。例えば、安田と富樫の研究では、二点吊り法を応用してやりを長軸まわりに回転させながら、ヤリの重心を通る短軸まわりのねじり振動の振動数を測定する実験を行った。そして、長軸まわりの回転数によってねじり振動の振動数が変化することが報告されている[2]。

本研究では、安田と富樫による実験を力学的に解析するため、二点吊り法の実験におけるヤリの力学モデルを考える。この力学モデルからヤリの重心を通る短軸まわりのねじり振動の運動方程式を導出する。そして、実験で得られた結果を再現する。導出した方程式から得た結果と実験結果を比較することで、実験と力学モデルの有効性を示すことを試みる。

### 2 安田・富樫の実験の概要[2]

2枚の板でやりを挟み、ベアリングを用いて回転ができるようにしてやりを固定した。さらに、ギヤボックスとモータを取り付け、やりがモータによって回転する構造にした。このとき重心はヤリの重心と変わらないように調整している。

ヤリの両端を伸びの少ないステンレスワイヤで水平になるように吊り、やりをわずかにねじって重心が動かないように振動をさせる。DC モーターコントローラーでヤリの回転数を 0～50rps まで変化させ、ねじり振動の振動数を測定した。周期と長軸まわりの回転数に関する実験結果を図 1 に示す。なお、図 1 で回転数が 1～4rps と 23～30rps の範囲では共振が大きく、振動数の測定が不可能だったとのことであった。

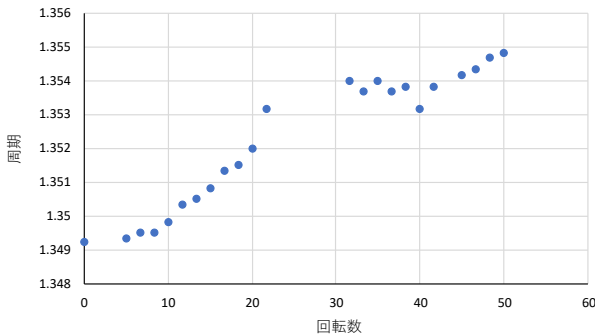


図 1 回転数の振動周期への影響

### 3 運動方程式の導出

二点吊り法におけるヤリの力学モデルを図 2 に示す。ヤリの質量を  $m$ 、糸の長さを  $l$ 、重心からヤリの先端と後端までの距離をそれぞれ  $a$  と  $b$ 、ヤリの先端の糸の張力を  $T_L$ 、後端の糸の張力を  $T_T$  とする。

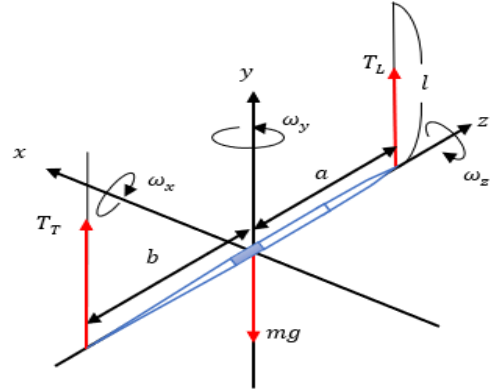


図 2 二点吊り法の力学モデル

図 2 のように座標軸をとり、各軸まわりのヤリの慣性モーメントを  $I_x, I_y, I_z$ 、角速度を  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 、トルクを  $N_x, N_y, N_z$  とすると、回転に対する運動方程式は以下ようになる。

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = N_x \quad (1)$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = N_y \quad (2)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = N_z \quad (3)$$

力のつり合いと  $x$  軸まわりのモーメントのつり合いから  $T_T$  と  $T_L$  を求めると、次式が得られる。

$$T_T = \frac{1}{a+b}(mga - N_x) \quad (4)$$

$$T_L = \frac{1}{a+b}(mgb + N_x) \quad (5)$$

ヤリの重心が動かないように  $y$  軸まわりの振動を起こしたときの様子を図 3 に示す。糸の鉛直方向からの変位角を  $\varphi_L$ 、重心からのヤリの変位角を  $\theta_y$  とする。

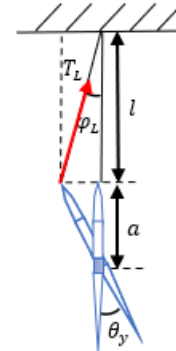


図 3  $y$  軸まわりのヤリの振動

$\varphi_L$ と $\theta_y$ がともに微小とすると、 $y$ 軸まわりのモーメントのつり合いから、 $y$ 軸まわりのトルクは次式で近似できる。

$$N_y \cong -\left(\frac{a^2}{l}T_L + \frac{b^2}{l}T_T\right)\theta_y \quad (6)$$

二点吊り法では伸びのない糸を使用するため、式(2)に式(4)、式(5)と式(6)を代入して整理すると、変位角 $\theta_y$ に対して次式が導かれる。

$$I_y \frac{d^2\theta_y}{dt^2} = -\frac{1}{l}\left\{mgab - (a-b)(I_y - I_z)\omega_z \frac{d\theta_y}{dt}\right\}\theta_y \quad (7)$$

#### 4 シミュレーション結果

式(7)で用いられたパラメータは実験で実際に用いられた値を使用する。具体的には $m = 2.405\text{kg}$ 、 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 、 $l = 1.8\text{m}$ 、 $a = 0.92\text{m}$ 、 $b = 1.33\text{m}$ 、 $\theta_y$ の初期値 $= 2.181^\circ$ 、 $I_y = 0.73\text{kg/m}^2$ 、 $I_z = 8.3 \times 10^{-5}\text{kg/m}^2$ とする。

シミュレーションによって回転数 0, 15, 30, 45rps における周期をそれぞれ計算し、実験データと比較した結果を図 4 に示す。図 4 からわかるように、回転数が小さいときは実験結果と一致した。しかし、回転数が大きくなるほど実験結果より周期が長くなった。

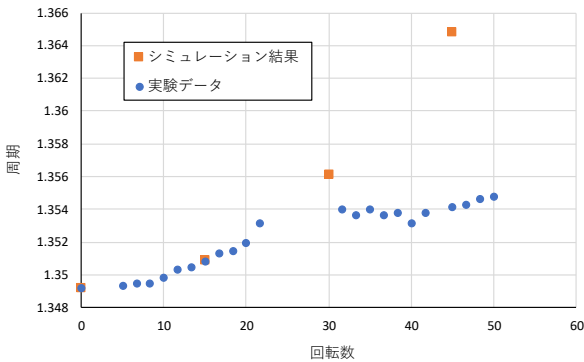


図 4 実験結果との比較

周期が長くなった原因を調べるため、糸の張力 $T_T$ と $T_L$ の時間変化をそれぞれ確認した。各回転数における $T_T$ と $T_L$ の出力波形を図 5 と図 6 に示す。

出力したそれぞれの張力をみると、回転数が 30rps のとき、 $T_T$ が負の値をとる時間帯が僅かにあった。回転数が 45rps になると、 $T_T$ と $T_L$ ともに負の値をとる時間帯が長くなることがわかった。

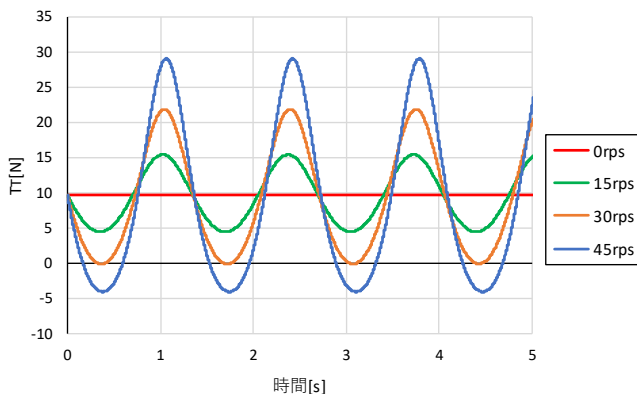


図 5 張力 $T_T$ の時間変化

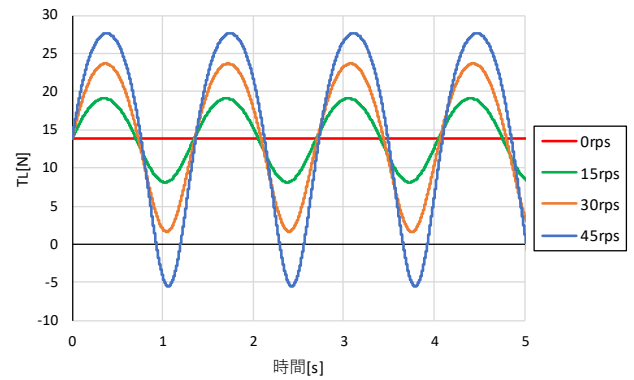


図 6 張力 $T_L$ の時間変化

そこで、糸の張力 $T_T$ と $T_L$ が負の値となると、それらの値を強制的に 0 にするという条件でシミュレーションを行った。シミュレーションから得た周期と実験データを比較した結果を図 7 に示す。ここでは回転数 $\omega_z$ を 25rps から 45rps まで 5rps ごとに調べた結果である。

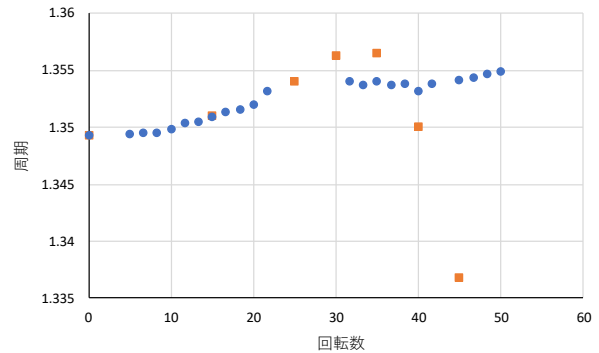


図 7 張力を補正したシミュレーションの結果

この結果をみると、回転数が大きくなるほど周期が短くなる傾向がみられた。このことは、今回用いた糸の張力モデルでは張力が実際の値よりも大きく評価されていることを示しており、その点で力学モデルが不十分であると考えられる。

#### 5 まとめと課題

本研究では、二点吊り法を応用したやり投げのヤリに関する回転実験に基づき、長軸まわりに回転するヤリの二点吊り法の力学モデルを考えた。その力学モデルからヤリの短軸まわりのねじり振動の運動方程式を導出し、シミュレーションを用いて実験結果を再現することを試みた。

その結果、長軸まわりの回転数が小さいときは実験で得られた周期と一致した。しかし、長軸まわりの回転数が大きくなるほど、実験結果より周期が長くなった。そして、その原因は回転数が大きくなると張力が負になる時間帯が発生するためであることを確認した。

今後の課題として、糸の張力のモデル化を再検討することで、力学モデルを改良することがあげられる。

#### 参考文献

- [1] 宮口尚義・前田正登：やり投げにおける飛行の分析，金沢大学教育学部紀要，教育科学，36，297-309（1987）。
- [2] 安田萌：やり投げにおけるヤリの力学的解析，茨城大学大学院教育学研究科修士論文，（2017）。
- [3] Geoffrey H. G. Dyson：The Mechanics of Athletics，University of London Press, Ltd., London,（訳）金原勇，洪川侃二，古藤高良，（1972）。