

スポーツにおける投射問題への3自由度モデルの応用

Application of Three Degrees of Freedom Model to Projectile Problems in Sports

発表者: 小長谷 康明 主査: 坪井 一洋 副査: 星野 修, 近藤 久

1 はじめに

斜放投射とは、物体をある初速度で斜め上方に投げ出す動作である。空気中を移動する物体に働く物理的な力が重力と空気抵抗のみとすれば、物体の運動は運動方程式で表すことができる。このとき、物体の重心の軌跡は放物線を描くため、一定の初速度に対して空中移動距離が最大となる最適な初速度が存在する。

放物運動の最適初速度が45 deg.であることは周知の事実である。これは投射点と着地点に高低差がなく、空気抵抗を無視した場合である。投射点が着地点より高ければ最適初速度は低くなる。しかし、陸上競技における砲丸投げの砲丸や走り幅跳びの身体重心が実際に投げ出される角度はこの最適初速度よりさらに低角度となる。

この推定値と実測値の不一致を説明するため、初速度と初速度を用いた2自由度のモデルとは異なる3自由度モデルが提案された⁽¹⁾。3自由度モデルは助走の影響を考慮しており、投射前の水平速度、投射速度、および投射角の3つの変数をもつ。そのモデルから投射前の水平速度と投射速度を含む形で最適な投射角が理論的に導かれた。しかし、それら2つのモデル変数の実測データが得られておらず、最適投射角の評価が十分にできていない。

本論文では、実測値から3自由度モデルに含まれる3つの変数の予測値を推定する方法を提案する。そして、予測値から最適初速度とその場合の空中移動距離が求まるので、それを実測値と比較することで推定方法を評価する。ここでは、砲丸投げと走り幅跳びを例に推定方法の検証をした。

2 3自由度モデル

2.1 3自由度モデル

ある物体を遠くへ投げるとき通常は助走する。この場合、助走により得られる身体を速度を効率良く利用するのが重要となる。そこで、助走を伴う投射について考える。

いま、ある物体が速度 V で助走し、一定の力を微小時間加えてその物体を速度 q_i で投射すると仮定する。このときの物体の運動量と力積の関係を速度の関係として表せば Fig. 1 のようになる。

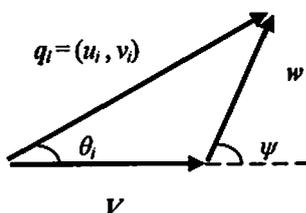


Fig. 1 3自由度モデル

ここで、 q_i を初速度ベクトル、 V を投射前の水平速度ベクトル、 w を投射速度ベクトル、 q_i と V がなす角 θ_i を初速度角、 V と w がなす角 ψ を投射角とそれぞれ呼ぶことにする。また、空中移動距離を最大にすることを考えているので $0 \text{ deg.} \leq \theta_i, \psi \leq 90 \text{ deg.}$ となる。以下では、 q_i, V, w は各ベクトルの大きさを表す。

このモデルから次の関係がわかる。ただし、 V は水平方向成分 V のみをもつとする。

$$w^2 = (u_i - V)^2 + v_i^2, \quad (1)$$

$$\tan \psi = \frac{v_i}{u_i - V}. \quad (2)$$

Fig. 1 の3自由度モデルから最適投射角 ψ_{opt} が理論的に導出できる⁽¹⁾。なお、 g は重力加速度、 h は投射点と着地点の高低差である。

$$\psi_{opt} = \cos^{-1} \left[\frac{2 \left(\frac{V}{w} \right) \left\{ \left(\frac{w}{V} \right)^2 + \frac{gh}{V^2} + \frac{1}{2} \right\} \left(\cos \varphi - \frac{1}{2} \right)}{3} \right]. \quad (3)$$

ただし、式中の φ は次式で定義される。

$$\varphi = \cos^{-1} \left[-1 + \frac{27 \left(\frac{w}{V} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{w}{V} \right)^2 + \frac{gh}{V^2} \right\}}{\left\{ \left(\frac{w}{V} \right)^2 + \frac{gh}{V^2} + \frac{1}{2} \right\}^3} \right]. \quad (4)$$

2.2 初速度と初速度角の関係

モデルにおいて3つのベクトル、 q_i, V 、および w がつく成る三角形に余弦定理を適用し、初速度 q_i について整理すれば次の q_i に関する2次方程式が得られる。

$$q_i^2 - 2(V \cos \theta_i) q_i - (w^2 - V^2) = 0. \quad (5)$$

このとき、解 q_i が正の実数となるためには以下の条件が必要となる。

$$\left(\frac{w}{V} \right)^2 - \sin^2 \theta_i \geq 0, \quad \text{かつ} \quad q_i \geq 0. \quad (6)$$

式(6)の第1の条件は投射速度と投射前の水平速度の比 w/V によって q_i の定義域が異なることを意味している。その比が $1 \leq w/V$ であれば θ_i は $0 \text{ deg.} \leq \theta_i \leq 90 \text{ deg.}$ の範囲をとることができる。一方、 $0 \leq w/V < 1$ の場合では θ_i には $\theta_{i, \max} = \sin^{-1}(w/V)$ が存在し、これより大きい値をとることはできない。

砲丸投げや走り幅跳びの実測データによると、 q_i は θ_i の減少関数となることがわかっている^(2,3)。これと条件式(6)から投射時のモデルとして意味をもつ解は次式となる。

$$q_i = q_i^*(\theta_i) = V \left\{ \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{w}{V} \right)^2 - \sin^2 \theta_i} \right\}. \quad (7)$$

3 モデル変数の推定

3.1 モデル変数の推定方法

投射速度 w は初速度の実測値 (u_0, v_0) と投射前の水平速度 V を式(1)に与えることで求まる。したがって、式(7)の関数形は V によって変化する。

この特徴を利用して、実測から得られる初速度と初速角の関係 $q_i^M(\theta)$ の関数形と式(7)の関数形を比較すれば、 $q_i^M(\theta)$ に最も近い $q_i^*(\theta)$ を求めることができる。

そこで、関数の面積に注目する。そして、それらの関数の面積差が最小となるとき、関数が最も近いと見なすことができる。この面積差を式で表すと以下ようになる。ただし、面積差を $q_i^M(\theta)$ の面積で正規化している。

$$\Delta S_n \approx \frac{\sum_k^{q_i^{\max}} |q_i^M(k) - q_i^*(k)| \Delta\theta}{\sum_k^{q_i^{\max}} |q_i^M(k)| \Delta\theta} \quad (8)$$

式(8)を利用すれば投射前の水平速度 V の推定値が決まる。これにより式(1)と式(2)から投射速度 w と投射角 ψ が得られる。さらに、 V と w の推定値を式(3)、式(4)に与えることで最適投射角 ψ_{opt} が求まる。したがって、求めた V 、 w および ψ_{opt} からこの場合の最適初速度 $(u_0, v_0)_{opt}$ 、最適初速度 $\theta_{i,opt}$ が推定できる。そこで、最適角で投射したときの空中移動距離の推定値 X_{opt} が求まる。そして、求めた X_{opt} を実測の空中移動距離と比較することで、推定したモデル変数と最適投射角を評価する。

3.2 砲丸投げデータによる評価

砲丸を投射する前の助走による身体の移動速度を V とし、速度 w 、角度 ψ で砲丸を投げるとすれば、砲丸投げの投射に3自由度モデルを適用できる。

砲丸投げの投射に関して力学的エネルギーの保存則から初速度 q_i と初速角 θ_i の関係が導かれている⁽²⁾。その関数を用いて砲丸投げの実測に関してモデル変数を推定し ψ_{opt} と $\theta_{i,opt}$ を求めた結果を Table 1 にまとめる。さらに、全移動距離 L 、実測値から求まる空中移動距離の推定値 X 、最適角における空中移動距離の推定値 X_{opt} を Table 2 に示す。

Table 1 砲丸投げデータに対するモデル変数の推定値

Athlete	V (m/s)	w (m/s)	ψ (deg.)	ψ_{opt} (deg.)	$\theta_{i,opt}$ (deg.)
1	4.4	8.62	50.7	48.2	32.3
2	3.5	8.98	42.6	46.7	34.1
3	4.3	8.34	52.0	47.8	32.0
4	3.7	8.51	51.4	46.8	33.1
5	5.7	6.92	57.2	50.5	27.9

Table 2 砲丸投げの最適初速角と空中移動距離

Athlete	θ (deg.)	θ_{opt} (deg.)	L (m)	X (m)	X_{opt} (m)
1	34.1	32.3	15.9	16.0	16.08
2	31.0	34.1	15.6	15.3	15.37
3	34.9	32.0	15.1	15.2	15.26
4	36.4	33.1	14.6	14.6	14.68
5	31.6	27.9	13.8	13.9	14.05

Table 2 の θ_i と $\theta_{i,opt}$ を比較すると5名の選手すべてにおいてほぼ同じ値となった。また、最適値 X_{opt} が記録 L に比べ大きな値となっている。これらの結果から、モデル変数 V の推定値は妥当であると考えられる。また、式(3)の最適投射角の有効性も確認できる。

3.3 走り幅跳びデータによる評価

走り幅跳びの踏切に3自由度モデルを適用すれば、助走によって得られる踏切前の身体重心の水平速度を V とし、踏み切ることで生じた速度を w 、そのときの角度を ψ とし考えられる。

走り幅跳びの踏切においては実測値の補間により初速度関数が得られている⁽³⁾。走り幅跳びの実測値に対し、この関数からモデル変数を推定し ψ_{opt} と $\theta_{i,opt}$ を求めた結果を Table 3 に示す。さらに、初速角の実測値と初速角、そのときの空中移動距離 L_2 、 X_{opt} を Table 4 に示す。また、 X は実測値から得られる空中移動距離の推定値である。

これより、 θ_i と $\theta_{i,opt}$ はほぼ同じ値であることがわかる。なお、Athlete 1, 3 では実測値 L_2 が最適値 X_{opt} より大きな値となっているが、これは測定時誤差の影響だと考えられる。

Table 3 走り幅跳びデータに対するモデル変数の推定値

Athlete	V (m/s)	w (m/s)	ψ (deg.)	ψ_{opt} (deg.)	$\theta_{i,opt}$ (deg.)
1	7.3	3.84	65.3	63.6	20.9
2	6.9	4.41	62.1	60.6	23.0
3	5.7	4.08	55.3	60.1	24.6

Table 4 走り幅跳びの最適初速角と空中移動距離

Athlete	θ_i (deg.)	$\theta_{i,opt}$ (deg.)	L_2 (m)	X (m)	X_{opt} (m)
1	21.4	20.9	7.22	7.18	7.18
2	23.5	23.0	7.27	8.15	8.16
3	22.7	24.6	6.40	6.21	6.24

4 まとめ

スポーツの投射運動において助走の影響を考慮した3自由度モデルから初速度を初速角の関数として導出し、実測値からモデル変数値を推定する方法を提案した。砲丸投げと走り幅跳びの実測データに基づいてモデル変数の推定値を求め、それから最適初速角と空中移動距離の理論値を算出した結果、実測値とほぼ一致した。今回の結果から、3自由度モデルは実測から得られる関数関係を含んだモデルだと考えられる。

文献

- (1) Tsuboi, K, A mathematical solution of the optimum takeoff angle in the long jump, *Procedia Engineering* 2, (2010), pp. 3205–3210.
- (2) Linthorne, N. P., Optimum release angle in the shot put, *Journal of Sports Sciences*, (2001), 19, pp. 359–372.
- (3) Linthorne, N. P., et al, Optimum take-off angle in the long jump, *Journal of Sports Sciences*, (July 2005); 23(7): pp. 703–712.